

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Matija Vedriš**

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**ODREĐIVANJE ELASTIČNIH  
PARAMETARA MATERIJALA  
GUMEMOG ELEMENTA  
RASTOJNIKA-PRIGUŠIVAČA**

Mentor:

Prof. dr. sc. Hinko Wolf

Student:

Matija Vedriš

Zagreb, 2016.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Prije svega bih želio zahvaliti svom mentoru prof. dr. sc. Hinku Wolfu na uloženom vremenu, korisnim i stručnim savjetima, primjedbama i vođenju kroz izradu ovog diplomskog rada.

Zahvaljujem se i mag. ing. Damjanu Čakmaku na strpljenju, nesebičnoj podršci i bezrezervnoj pomoći u rješavanju problema koji su se javljali tijekom izrade rada.

Također se zahvaljujem dr. sc. Zvonimiru Tomičeviću na pomoći pri eksperimentalnom ispitivanju.

Posebna zahvala ide mojoj obitelji koja me je podržavala kroz sve godine studiranja i bila veliki oslonac kada je to bilo najpotrebnije.

Matija Vedriš



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: Matija Vedriš

Mat. br.: 0035169000

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Određivanje elastičnih parametara materijala gumenog elementa rastojnika-prigušivača**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Determining of Spacer-Damper Rubber Element Elastic Material Parameters**

Opis zadatka:

Rastojnik-prigušivač dio je ovjesne opreme dalekovoda. Koristi se za održavanje zadanog razmaka između susjednih vodiča u snopu i za smanjenje intenziteta vjetrom uzrokovanih (aeolskih) vibracija vodiča. Smanjenje intenziteta aeolskih vibracija vodiča funkcija je mehaničkih karakteristika (inercijskih, elastičnih i prigušnih) rastojnika-prigušivača. U ovom radu potrebno je odrediti elastične parametre materijala gumenog elementa rastojnika-prigušivača na temelju rezultata eksperimentalnog ispitivanja gumenog elastičnog elementa i rezultata dobivenih korištenjem nelinearnog numeričkog modela (metoda konačnih elemenata).

Tijekom rada potrebno je:

1. Ukratko opisati pojavu aeolskih vibracija vodiča dalekovoda i osnovne tipove rastojnika-prigušivača.
2. Definirati tipove strukturne nelinearnosti (geometrijsku, materijalnu, nelinearnost uslijed kontakta), te za svaki tip nelinearnosti verificirati konačne elemente usporedbom numeričkih rješenja s referentnim rješenjima.
3. Opisati specifičnosti jednadžbi koje se koriste u analizi hiperelastičnih materijala (gume).
4. Na temelju dobivene tehničke dokumentacije izraditi trodimenzionalni nelinearni numerički model gumenog elastičnog elementa (metoda konačnih elemenata).
5. Odrediti elastične parametre materijala gumenog elementa rastojnika-prigušivača.

U radu navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

5. svibnja 2016.

Zadatak zadao:

Prof. dr. sc. Hinko Wolf

Rok predaje rada:

7. srpnja 2016.

Predviđeni datumi obrane:

13., 14. i 15. srpnja 2016.

Predsjednica Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić



## SADRŽAJ

1. UVOD.....	3
2. AEOLSKE VIBRACIJE SNOPA VODIČA .....	4
2.1. Rastojnik-prigušivač .....	6
3. KONTAKT .....	9
3.1. Vrste kontakta .....	9
3.2. Hertzov kontakt.....	11
3.3. Definiranje kontakta u programskom paketu <i>Abaqus</i> .....	12
4. NELINEARNA ANALIZA .....	15
4.1. Inkrementalna metoda.....	16
4.1.1. Newton-Raphsonova metoda .....	17
4.2. Nelinearni konstitutivni model .....	19
4.2.1. Hiperelastični materijal .....	20
4.2.2. EPDM guma.....	26
5. VERIFIKACIJA PRIMIJENJENIH KONAČNIH ELEMENATA .....	27
5.1. Primjer I.....	27
5.1.1. Jednoosno opterećenje elementa .....	27
5.1.1.1. Analitičko rješenje.....	28
5.1.1.2. Numeričko rješenje.....	29
5.1.2. Dvoosno opterećenje.....	30
5.1.2.1. Analitičko rješenje.....	31
5.1.2.2. Numeričko rješenje.....	32
5.1.3. Ravninsko stanje deformacija .....	33
5.1.3.1. Analitičko rješenje.....	34
5.1.3.2. Numeričko rješenje.....	35
5.2. Primjer II: analiza kontakta bez trenja .....	37
5.2.1. Teorija malih pomaka i deformacija .....	38
5.2.1.1. Analitičko rješenje.....	38
5.2.1.2. Numeričko rješenje.....	38
5.2.2. Teorija velikih pomaka i velikih deformacija koristeći pritom neo–Hooke materijalni model.....	40
5.2.2.1. Analitičko rješenje.....	40
5.2.2.2. Numeričko rješenje.....	41

---

5.2.3.	Dodatak – Ogden materijalni model .....	43
5.2.3.1.	Analitičko rješenje.....	43
5.2.3.2.	Numeričko rješenje.....	44
5.2.4.	Dodatak – Arruda-Boyce materijalni model .....	46
5.2.4.1.	Analitičko rješenje.....	46
5.2.4.2.	Numeričko rješenje.....	47
6.	EKSPERIMENT .....	49
6.1.	Kidalica <i>Messphysik Beta 50-5</i> .....	49
6.2.	Tlačna ispitivanja .....	50
6.3.	Vlačna ispitivanja.....	55
7.	NUMERIČKA ANALIZA GUMENOG ELEMENTA .....	62
7.1.	Tlačno ispitivanje.....	62
7.1.1.	Rezultati tlačnog ispitivanja .....	67
7.2.	Vlačno ispitivanje .....	71
7.2.1.	Rezultati vlačnog ispitivanja .....	73
7.3.	Određivanje materijalnih parametara gumenog elementa.....	77
8.	ZAKLJUČAK.....	82
9.	DODATAK.....	84
	LITERATURA.....	91

## POPIS SLIKA

Slika 2.1.	Laminarno opstrujivanje cilindra [6] .....	4
Slika 2.2.	Nastanak vrtloga [6].....	5
Slika 2.3.	Karmanovi vrtlozi [7] .....	5
Slika 2.4.	Različiti tipovi rastojnika-prigušivača [8] .....	8
Slika 3.1.	Povezivanje ploha prilikom odabira <i>node-to-surface</i> formulacije [21] .....	12
Slika 3.2.	Povezivanje ploha prilikom odabira <i>surface-to-surface</i> formulacije [21].....	12
Slika 3.3.	Virtualna opruga koja se uvodi za zadovoljavanje kontaktnih ograničenja [21] .....	14
Slika 4.1.	Inkrementalna metoda.....	17
Slika 4.2.	Standardna Newton-Raphsonova metoda .....	18
Slika 4.3.	Kombinacija Newton-Raphson i inkrementalne metode .....	19
Slika 4.4.	Nelinearni elastični model .....	21
Slika 4.5.	Funkcije gustoće energije deformiranja $U$ i $U^*$ .....	22
Slika 5.1.	Statički jednoosno opterećen prizmatični uzorak .....	27
Slika 5.2.	Proračunski model: a) simetrije, b) zadano jednoosno opterećenje .....	29
Slika 5.3.	Mreža modela načinjena od jednog prizmatičnog 3D elementa .....	30
Slika 5.4.	Usporedba analitičkog i numeričkog rješenja za slučaj jednoosnog opterećenja .....	30
Slika 5.5.	Statički dvoosno opterećen prizmatični uzorak .....	31
Slika 5.6.	Zadano opterećenje za slučaj dvoosnog opterećenja .....	33
Slika 5.7.	Usporedba analitičkog i numeričkog rješenja za slučaj dvoosnog opterećenja .....	33
Slika 5.8.	Ravninsko stanje deformacija prizmatičnog uzorka .....	34
Slika 5.9.	3D model: a) zadano opterećenje, b) onemogućene deformacije .....	36
Slika 5.10.	Usporedba analitičkog i numeričkog rješenja za slučaj ravninskog stanja deformacija ...	36
Slika 5.11.	Statičko tlačno ispitivanje gumenog uzorka .....	37
Slika 5.12.	Krutoj ploči pomak je dopušten samo u smjeru osi $y$ .....	39
Slika 5.13.	Primijenjeni rubni uvjeti simetrije .....	39
Slika 5.14.	Mreža modela napravljena od jednog prizmatičnog elementa.....	40
Slika 5.15.	Usporedba odnosa primijenjene sile $F$ i pomaka $\delta$ (linearno i neo-Hooke).....	42
Slika 5.16.	Usporedba odnosa primijenjene sile $F$ i pomaka $\delta$ (Ogden).....	45
Slika 5.17.	Utjecaj materijalnih parametara Ogden modela.....	45
Slika 5.18.	Usporedba odnosa primijenjene sile $F$ i pomaka $\delta$ (Arruda-Boyce).....	48
Slika 5.19.	Utjecaj materijalnih parametara Arruda-Boyce modela .....	48
Slika 6.1.	Kidalica <i>Messphysik Beta 50-5</i> .....	49
Slika 6.2.	Eksperimentalne postavke za tlačno ispitivanje .....	50
Slika 6.3.	Prikaz eksperimentalnog tlačnog ispitivanja .....	50
Slika 6.4.	Usporedba rezultata ispitivanja za uzorak E1 i E2 .....	51
Slika 6.5.	Usporedba rezultata sa i bez mazivog sredstva.....	52
Slika 6.6.	Rezultati sa i bez predkondicioniranja za brzinu od 500 mm/min i s trenjem.....	53
Slika 6.7.	Rezultati sa i bez predkondicioniranja s trenjem .....	54
Slika 6.8.	Rezultati sa i bez predkondicioniranja s mazivim sredstvom .....	54
Slika 6.9.	Utjecaj trenja za slučaj s predkondicioniranjem .....	55
Slika 6.10.	Eksperimentalne postavke za vlačno ispitivanje.....	55
Slika 6.11.	Prikaz eksperimentalnog vlačnog ispitivanja.....	56
Slika 6.12.	Rezultati vlačnog ispitivanja prikazani s prednaprezanjem.....	57
Slika 6.13.	Usporedba uzoraka E1 i E2 .....	57
Slika 6.14.	Uzorak E1 – rezultati sa i bez mazivog sredstva .....	58

Slika 6.15.	Rezultati sa i bez predkondicioniranja za brzinu od 500 mm/min i s trenjem .....	59
Slika 6.16.	Rezultati sa i bez predkondicioniranja s trenjem .....	59
Slika 6.17.	Rezultati sa i bez predkondicioniranja s mazivim sredstvom .....	60
Slika 6.18.	Utjecaj trenja za slučaj s predkondicioniranjem .....	61
Slika 7.1.	3D model: a) zadano opterećenje i rubni uvjeti, b) simetrija .....	62
Slika 7.2.	Gumeni element: a) sa radijusima, b) bez radijusa .....	63
Slika 7.3.	Mreža konačnih elemenata: a) model s radijusima, b) model bez radijusa .....	63
Slika 7.4.	Usporedba modela sa radijusima i bez radijusa .....	64
Slika 7.5.	Mreže s različitim brojem konačnih elemenata: a) 60, b) 144, c) 608, d) 3937 .....	65
Slika 7.6.	Konvergenција rješenja za različite gustoće mreža .....	65
Slika 7.7.	Usporedba materijalnih modela .....	66
Slika 7.8.	Iznos maksimalnih deformacija .....	67
Slika 7.9.	Tlačno opterećenje pri brzini od 5 mm/min bez mazivog sredstva .....	68
Slika 7.10.	Tlačno opterećenje pri brzini od 50 mm/min bez mazivog sredstva .....	68
Slika 7.11.	Tlačno opterećenje pri brzini od 500 mm/min bez mazivog sredstva .....	69
Slika 7.12.	Tlačno opterećenje pri brzini od 5 mm/min sa mazivim sredstvom .....	70
Slika 7.13.	Tlačno opterećenje pri brzini od 50 mm/min sa mazivim sredstvom .....	70
Slika 7.14.	Tlačno opterećenje pri brzini od 500 mm/min sa mazivim sredstvom .....	71
Slika 7.15.	3D model: a) zadano opterećenje i rubni uvjeti, b) simetrija .....	72
Slika 7.16.	a) Mreža konačnih elemenata, b) deformirani gumeni element .....	72
Slika 7.17.	Vlačno opterećenje pri brzini od 5 mm/min bez mazivog sredstva .....	73
Slika 7.18.	Vlačno opterećenje pri brzini od 50 mm/min bez mazivog sredstva .....	74
Slika 7.19.	Vlačno opterećenje pri brzini od 500 mm/min bez mazivog sredstva .....	74
Slika 7.20.	Vlačno opterećenje pri brzini od 5 mm/min s mazivim sredstvom .....	75
Slika 7.21.	Vlačno opterećenje pri brzini od 50 mm/min s mazivim sredstvom .....	76
Slika 7.22.	Vlačno opterećenje pri brzini od 500 mm/min s mazivim sredstvom .....	76
Slika 7.23.	Opterećenje pri brzini od 5 mm/min bez mazivog sredstva: a) tlak, b) vlak .....	79
Slika 7.24.	Opterećenje pri brzini od 50 mm/min bez mazivog sredstva: a) tlak, b) vlak .....	79
Slika 7.25.	Opterećenje pri brzini od 500 mm/min bez mazivog sredstva: a) tlak, b) vlak .....	80
Slika 7.26.	Opterećenje pri brzini od 5 mm/min sa mazivim sredstvom: a) tlak, b) vlak .....	80
Slika 7.27.	Opterećenje pri brzini od 50 mm/min sa mazivim sredstvom: a) tlak, b) vlak .....	80
Slika 7.28.	Opterećenje pri brzini od 500 mm/min sa mazivim sredstvom: a) tlak, b) vlak .....	81
Slika 9.1.	Usporedba rezultata ispitivanja za uzorak E1 i E2 .....	84
Slika 9.2.	Usporedba rezultata sa i bez mazivog sredstva .....	85
Slika 9.3.	Rezultati sa i bez predkondicioniranja za brzinu od 500 mm/min i s trenjem .....	85
Slika 9.4.	Rezultati sa i bez predkondicioniranja s trenjem za sve tri brzine .....	86
Slika 9.5.	Rezultati sa i bez predkondicioniranja s mazivim sredstvom, za sve tri brzine .....	86
Slika 9.6.	Utjecaj trenja za slučaj s predkondicioniranjem .....	87
Slika 9.7.	Rezultati vlačnog ispitivanja prikazani s prednaprežanjem .....	87
Slika 9.8.	Usporedba uzoraka E1 i E2 .....	88
Slika 9.9.	Uzorak E1 – rezultati sa i bez mazivog sredstva .....	88
Slika 9.10.	Rezultati sa i bez predkondicioniranja za brzinu od 500 mm/min i s trenjem .....	89
Slika 9.11.	Rezultati sa i bez predkondicioniranja s trenjem, za sve brzine .....	89
Slika 9.12.	Rezultati sa i bez predkondicioniranja s mazivim sredstvom, za sve brzine .....	90
Slika 9.13.	Utjecaj trenja za slučaj s predkondicioniranjem .....	90

## POPIS TABLICA

Tablica 5.1.	Parametri za jednoosno opterećenje .....	28
Tablica 5.2.	Parametri za dvoosno opterećenje.....	31
Tablica 5.3.	Parametri za slučaj ravninskog stanja deformacija .....	34
Tablica 5.4.	Geometrijsko materijalne karakteristike za prizmatični uzorak.....	37
Tablica 5.5.	Usporedba primijenjenih sila $F$ za slučaj malih pomaka i deformacija .....	40
Tablica 5.6.	Usporedba primijenjenih maksimalnih sila $F$ za slučaj velikih pomaka i deformacija (neo-Hooke) .....	42
Tablica 5.7.	Geometrijsko materijalne karakteristike za prizmatični uzorak (Ogden).....	43
Tablica 5.8.	Usporedba primijenjenih maksimalnih sila $F$ za slučaj velikih pomaka i deformacija (Ogden) .....	44
Tablica 5.9.	Geometrijsko materijalne karakteristike za prizmatični uzorak (Arruda-Boyce) .....	46
Tablica 5.10.	Usporedba primijenjenih maksimalnih sila $F$ za slučaj velikih pomaka i deformacija (Arruda-Boyce) .....	47
Tablica 7.1.	Usporedba modela sa i bez radijusa .....	64
Tablica 7.2.	Geometrijsko materijalne karakteristike .....	65
Tablica 7.3.	Usporedba rezultata dobivenih različitim gustoćama mreže.....	66
Tablica 7.4.	Usporedba rezultata za tlačno opterećenje .....	77
Tablica 7.5.	Usporedba rezultata za vlačno opterećenje .....	78
Tablica 7.6.	Usporedba rezultata dobivenih tlačnim i vlačnim deformiranjem .....	78
Tablica 7.7.	Zajednička vrijednost materijalne konstante $C_{10}$ za tlak i vlak po brzinama deformacije .....	78

## POPIS OZNAKA

### Latinične oznake

Oznaka	Jedinica	Opis
$A$	m	amplituda vibracija
$A_0$	m <sup>2</sup>	početna površina poprečnog presjeka uzorka
$C_{ij}$	Pa (N/m <sup>2</sup> )	hiperelastična materijalna konstanta ( $i, j = 0 \dots N$ )
$D$	m	promjer vodiča
$D_1$	Pa <sup>-1</sup> (m <sup>2</sup> /N)	hiperelastična obimna materijalna konstanta ( $D_1=2/K_0$ )
$E_0$	Pa (N/m <sup>2</sup> )	Youngov modul (početni modul elastičnosti za $\varepsilon=0$ )
$E_{rel}$	%	relativna greška
$E_s$	Pa (N/m <sup>2</sup> )	sekantni modul elastičnosti
$E_t$	Pa (N/m <sup>2</sup> )	tangentni modul elastičnosti
$F$	N (kg·m/s <sup>2</sup> )	sila
$\mathbf{F}$		gradijent deformiranja
$F(t)$	N	periodična sila
$G$	Pa (N/m <sup>2</sup> )	modul smicanja
$H_A$	- (ShA)	tvrdća prema Shoreu, tip A
$\mathbf{J}$		Jacobijeva matrica
$K$	Pa (N/m <sup>2</sup> )	volumenski modul elastičnosti
$\mathbf{K}$	N/m	matrica krutosti
$L$	m	početna duljina
$P_C(A)$	W (J/s)	snaga koju vodič apsorbira uslijed vlastitog prigušenja
$P_D(A)$	W (J/s)	snaga koju apsorbira prigušivač
$P_W(A)$	W (J/s)	snaga koju aerodinamičke sile unose u sustav
$\mathbf{R}$	N	vektor čvornih sila
$U$	J/m <sup>3</sup>	gustoća energije deformiranja, eng. <i>strain energy density</i>
$V$	m <sup>3</sup>	volumen uzorka nakon deformiranja
$\mathbf{V}$	m	vektor pomaka
$V_0$	m <sup>3</sup>	početni volumen uzorka
$X, Y, Z$	m	globalne Kartezijeve koordinate
$a, b, c$	m	duljina stranice deformiranog uzorka
$a_0, b_0, c_0$	m	početna duljina stranice
$c_L$	-	koeficijent uzgona
$c_s$	-	Strouhalov broj
$f$	Hz	frekvencija vibracija
$f_s$	Hz	frekvencija odvajanja Karmanovih vrtloga
$l$	m	trenutna duljina
$t$	s	vrijeme
$u, v, w$	m	pomak u smjerovima osi $x, y, z$
$x, y, z$	-	lokalne Kartezijeve koordinate

**Grčke oznake**

Oznaka	Jedinica	Opis
$\alpha_i$	-	eksponencijalni hiperelastični faktor Ogden modela
$\delta$	m	pomak
$\delta_{ij}$	-	Kroneckerov delta operator
$\Delta t$	°C	temperaturni inkrement
$\varepsilon$	-	stvarna deformacija
$\varepsilon_0$	-	inženjerska deformacija
$\lambda_{1,2,3}$	-	istezanje, omjer istezanja
$\lambda_{\text{Lam}}$	-	prva Laméova konstanta
$\lambda_m$	-	konstanta materijala Arruda-Boyce modela
$\mu$	-	faktor trenja (Coulombov faktor trenja)
$\mu_i$	Pa (N/m <sup>2</sup> )	hiperelastični koeficijent Ogden modela
$\mu_{\text{Lam}}$	-	druga Laméova konstanta
$\nu$	-	Poissonov faktor
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	gustoća
$\sigma$	Pa (N/m <sup>2</sup> )	stvarno naprezanje
$\sigma_0$	Pa (N/m <sup>2</sup> )	inženjersko naprezanje

## SAŽETAK

Tema diplomskog rada je analiza gumenog elementa rastojnika-prigušivača pomoću metode konačnih elemenata, u svrhu dobivanja elastičnih parametara materijala gumenog elementa.

U radu je opisana pojava aeolskih vibracija vodiča dalekovoda i osnovni tipovi rastojnika-prigušivača. Definirani su tipovi strukturne nelinearnosti (geometrijska, materijalna, nelinearnost uslijed kontakta). Prikazan je razvoj kontaktne mehanike, opisane su vrste kontakata i objašnjene postavke za definiranje kontakta u programskom paketu *Abaqus*. Objašnjene su geometrijska i materijalna nelinearnost te opisane specifičnosti jednačbi koje se koriste u analizi hiperelastičnih materijala (gume) Za svaki tip nelinearnosti verificirani su konačni elementi usporedbom numeričkih rješenja s referentnim rješenjima.

U nastavku su prikazani rezultati eksperimenta izvršenog na gumenom elementu. Napravljen je nelinearni numerički model u programskom paketu *Abaqus* te je opisan tijek izrade modela. Preklapanjem rezultata numeričke analize i eksperimenta dobiveni su elastični parametri materijala gumenog elementa rastojnika-prigušivača.

Ključne riječi: aeolske vibracije; rastojnik-prigušivač; guma; nelinearna analiza; hiperelastičnost; kontakt; *Abaqus*



## SUMMARY

The subject of this thesis is the analysis of the spacer-damper rubber element using the finite element method, in order to determine the rubber element elastic material parameters.

The thesis describes the phenomenon of the power line aeolian vibration and basic types of spacer-dampers. Types of structural nonlinearity (geometric, material, nonlinearity due to contact) are defined through thesis. In thesis, the development of contact mechanics is shown, the types of contacts are described and the settings to define the contact in software program *Abaqus* are explained. The geometric and material nonlinearity are explained and the specifics of the equations used in the analysis of hyperelastic materials (rubber) are described. Each type of nonlinearity finite elements is verified by comparing the numerical and reference results.

At the end of the thesis, the results of experiments performed on the rubber element are shown. The making of nonlinear numerical model has been described and then calculated in software program *Abaqus*. Elastic material parameters of the spacer-damper rubber element where determined through comparison of the numerical analysis and experimental results.

Key words: aeolian vibrations; spacer-damper; rubber; nonlinear analysis; hyperelasticity; contact; *Abaqus*

## 1. UVOD

Razvojem i napretkom tehnologije izvedbe konstrukcija postaju sve složenije što otežava pronalazak jednostavnijih analitičkih modela kojima bi se aproksimirala i linearizirala konstrukcija u svrhu lakšeg i bržeg proračuna.

Moderne numeričke inženjerske metode, kao što je metoda konačnih elemenata, imaju neprocjenjivu važnost u svrhu proračuna i verificiranja analitički teško rješivih problema. Prednosti numeričkih metoda još više dolaze do izražaja razvojem brzih računala i računalnih algoritama pomoću kojih se postupak pronalaženja rješenja znatno pojednostavljuje. Proračuni za koje su trebali dani, u današnje doba računalni procesor riješi za vrlo kratko vrijeme (milisekunde) što povećava produktivnost i efikasnost pri rješavanju inženjerskih problema. Ovaj rad je orijentiran određivanju elastičnih parametara materijala gumenog zgloba rastojnika-prigušivača pomoću metode konačnih elemenata.

Rastojnik-prigušivač dio je ovjesne opreme dalekovoda. Koristi se za održavanje zadanog razmaka između susjednih vodiča u snopu i za smanjenje intenziteta vjetrom uzrokovanih (aeolskih) vibracija vodiča. Smanjenje intenziteta aeolskih vibracija vodiča funkcija je mehaničkih karakteristika (inercijskih, elastičnih i prigušnih) rastojnika-prigušivača.

U ovom diplomskom radu ukratko je opisana pojava aeolskih vibracija vodiča dalekovoda te je opisan način na koji se aeolske vibracije prigušuju korištenjem rastojnika-prigušivača.

Zatim su definirani tipovi strukturne nelinearnosti (geometrijska, materijalna, nelinearnost uslijed kontakta). Ukratko je opisan razvoj kontaktne mehanike, objašnjene su vrste kontakta te su prikazane i uspoređene mogućnosti koje nudi programski paket *Abaqus* prilikom definiranja kontakta. Objašnjena je geometrijska nelinearnost, te je prikazana materijalna nelinearnost uslijed korištenja hiperelastičnog materijala (gume) i specifičnosti jednadžbi koje se koriste u analizi takvih materijala. Potom su za svaki tip nelinearnosti verificirani konačni elementi usporedbom numeričkih rješenja s referentnim rješenjima.

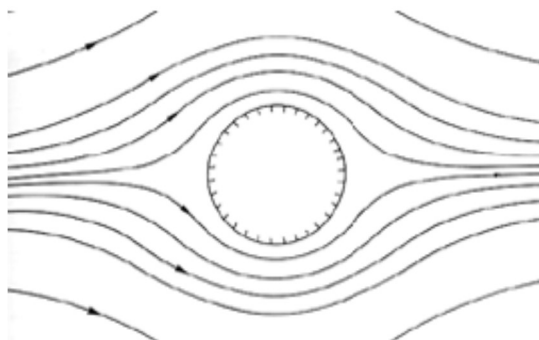
Na kraju su prikazani rezultati eksperimenta izvršenog na gumenom elementu te je napravljen nelinearni numerički model. Preklapanjem rezultata dobiveni su elastični parametri materijala gumenog elementa rastojnika-prigušivača.

## 2. AEOLSKE VIBRACIJE SNOPA VODIČA

Aeolske vibracije nazvane su po grčkom bogu vjetera, Aeolu [8]. Uzrok stvaranja aeolskih vibracija vodiča dalekovoda su stacionarna laminarna zračna strujanja malih brzina (1 - 7 m/s) [4] poprečno na smjer vodiča. Kao posljedica tih strujanja na zavjetrinskoj strani vodiča nastaju zračni vrtlozi, poznati kao Karmanovi vrtlozi. Prilikom naizmjeničnog odvajanja zračnih vrtloga sa suprotnih strana profila vodiča javlja se harmonijski promjenjiva uzgonska sila koja djeluje u smjeru okomitom na brzinu vjetera. U slučaju poklapanja frekvencija odvajanja Karmanovih vrtloga s nekom od vlastitih frekvencija vodiča može doći do intenzivnih rezonantnih vibracija. To može dovesti do zamora materijala vodiča u blizini nosivih stezaljki, zateznih stezaljki, te stezaljki rastojnika-prigušivača. Područje u kojem se frekvencije vibracija užeta kreću prilikom aeolskih vibracija je između 5 i 100 Hz [1] i [8], a ovise o brzini vjetera, karakteristikama užeta, rasponu dalekovoda i sl.

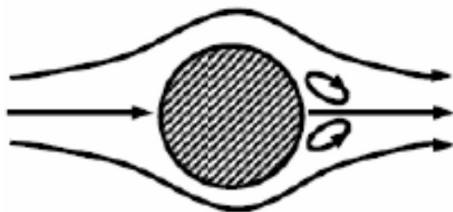
Postoji malo pouzdanih podataka o veličini aerodinamičkih sila koje karakteriziraju ovu pojavu, čak i za slučaj stacionarnog laminarnog strujanja fluida poprečno na vodič koji miruje kao najjednostavnijeg fizikalnog modela. Vibriranjem vodiča u struji fluida, strujanjem koje nije okomito na vodič ili pojavom turbulencija u struji fluida model se još dodatno komplicira. Postotak turbulencija definiran je kao omjer standardne devijacije brzine vjetera u smjeru okomitom na uzdužnu os vodiča i srednje vrijednosti brzine vjetera u smjeru okomitom na uzdužnu os vodiča.

Ukoliko se cilindrično tijelo postavi u struju fluida, fluid će biti prisiljen skrenuti svoj tok oko tijela. Prilikom strujanja s niskim Reynoldsovim brojem ( $Re < 5$ ) [1] i [6], strujnice će strujati oko tijela i pri tome će ostati nerazdvojene (Slika 2.1.).



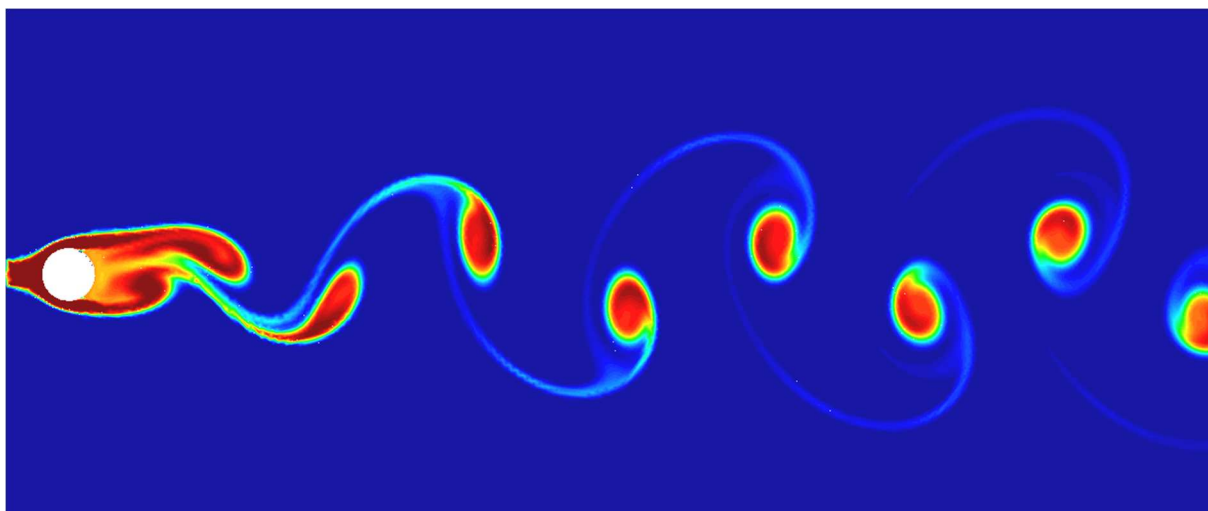
Slika 2.1. Laminarno opstrujivanje cilindra [6]

Kada fluid laminarno struji s konstantnom brzinom  $v$  na nepomični cilindar, a Reynoldsov broj je  $5 < Re < 40$  [1] i [6], na zavjetrinskoj strani tijela se počinju formirati dva vrtloga suprotne rotacije, ali koji se još drže za tijelo (Slika 2.2.).



Slika 2.2. Nastanak vrtloga [6]

S daljnjim porastom Reynoldsovog broja ( $Re > 40$ ) nastali vrtlozi se počinju odvajati od tijela kao posljedica viskoznosti fluida [1] i [6]. Nastali vrtlozi, koji se odvoje od tijela, putuju zajedeno sa strujom fluida (Slika 2.3.).



Slika 2.3. Karmanovi vrtlozi [7]

Periodična sila  $F(t)$  kojom fluid djeluje na cilindar definirana je kao

$$F(t) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot D \cdot l \cdot v^2 \cdot c_L \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_s \cdot t), \quad (2.1)$$

gdje je  $\rho$  gustoća fluida,  $D$  promjer vodiča,  $l$  duljina vodiča,  $v$  brzina fluida,  $c_L$  koeficijent uzgona,  $f_s$  frekvencija odvajanja Karmanovih vrtloga i  $t$  vrijeme.

Frekvencija odvajanja Karmanovih vrtloga definirana je kao

$$f_s = \frac{c_s \cdot v}{D}, \quad (2.2)$$

gdje je  $c_s$  Strouhalov broj ( $c_s \approx 0,19$ ).

Izraz za periodičnu silu (2.1) vrijedi samo približno, i to samo za mirujući cilindar ili cilindar koji vibrira s vrlo malim amplitudama. Rezultat periodične sile s kojom fluid djeluje na cilindar koji harmonijski vibrira s frekvencijom  $f$  i amplitudom  $A$  poprečno na smjer strujanja fluida se znatno razlikuje.

Periodična sila za taj slučaj se definira kao

$$F(t) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot D \cdot l \cdot v^2 \cdot c_L(a, r) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \varphi(a, r)), \quad (2.3)$$

U ovom su slučaju koeficijent uzgona  $c_L(a, r)$  i fazni kut između aerodinamičke sile i pomaka cilindra  $\varphi(a, r)$  funkcije omjera  $a = A/D$  i  $r = f/f_s$ . Omjer  $a = A/D$  često se naziva bezdimenzijska ili relativna amplituda vibracija. Za vrijednosti  $0,9 \leq r \leq 1,3$  i  $0 \leq a \leq 1$  aerodinamičke sile unose snagu u sustav, a za ostale iznose  $a$  i  $r$  vibracije se prigušuju. Kod cilindra koji vibrira amplitude aerodinamičkih sila mogu biti višestruko veće od onih za mirujući cilindar.

Uz aeolske vibracije se često veže pojava sinkronizacije. To je naziv za pojavu pri kojoj se frekvencija aeolskih vibracija vodiča ne mijenja ako se tijekom već pobuđenih rezonantnih vibracija brzina vjetra promjeni u iznosu od  $0,9v - 1,3v$ . To područje brzina se naziva područje sinkronizacije.

## 2.1. Rastojnik-prigušivač

Jedan od načina prigušenja aeolskih vibracija snopa vodiča je korištenje rastojnika-prigušivača. Relativno gibanje stezaljki u odnosu na tijelo rastojnika-prigušivača značajno doprinosi rasipanju energije, a postiže se ugradnjom gumenog elementa u zglobove ruku rastojnika. Za gumene elemente je bitno da imaju sljedeće karakteristike:

- visoki gubici histereze
- otpornost na ozon i UV zračenje
- zadržavanje svojstva u cijelom rasponu radnih temperatura
- održavanje svojstva za očekivani vijek trajanja dalekovodne linije.

Za procjenu i određivanje amplituda aeolskih vibracija snopa vodiča s rastojnicima-prigušivačima koristi se metoda ravnoteže energija (eng. *Energy balance method/principle*, EBP). Ova metoda je prilagođena modelu oscilirajuće žice (savojna krutost uzeta se pri određivanju amplituda vibracija ne uzima u obzir), a rastojnik-prigušivač se modelira kao

linearni element. Glavne prednosti ove metode su jednostavnost i numerička efikasnost određivanja amplituda vibracija snopa.

Metoda ravnoteže energija temelji se na nelinearnoj algebarskoj jednadžbi za ravnotežu snaga za slučaj stacionarnih vibracija užeta pri nekoj od vlastitih frekvencija sustava

$$P_w(A) = P_D(A) + P_c(A), \quad (2.4)$$

gdje je  $P_w(A)$  snaga koju aerodinamičke sile unose u sustav,  $P_D(A)$  je snaga koju apsorbira prigušivač,  $P_c(A)$  je snaga koju vodič apsorbira uslijed vlastitog prigušenja.

Rastojnici-prigušivači spadaju u elastične rastojnike i njihova je uloga ograničavanje međusobne udaljenosti između pojedinih vodiča u snopu. Da bi se smanjio utjecaj rastojnika-prigušivača na gibanje vodiča, ti rastojnici-prigušivači moraju istovremeno omogućiti i relativno velike pomake tih vodiča.

Jedan od zahtjeva koji rastojnici-prigušivači moraju ispuniti je dovoljna fleksibilnost, jer se na taj način mogu znatno smanjiti deformacije vodiča uz stezaljke rastojnika-prigušivača. Bitno je pronaći ravnotežu između želje za što većom fleksibilnošću i zahtjeva za krutošću. Ako rastojnik-prigušivač nije dovoljno krut moguća je pojava velikih amplituda oscilacija ruku, a to dovodi do pretjeranog trošenja i zamora materijala prigušnog mehanizma.

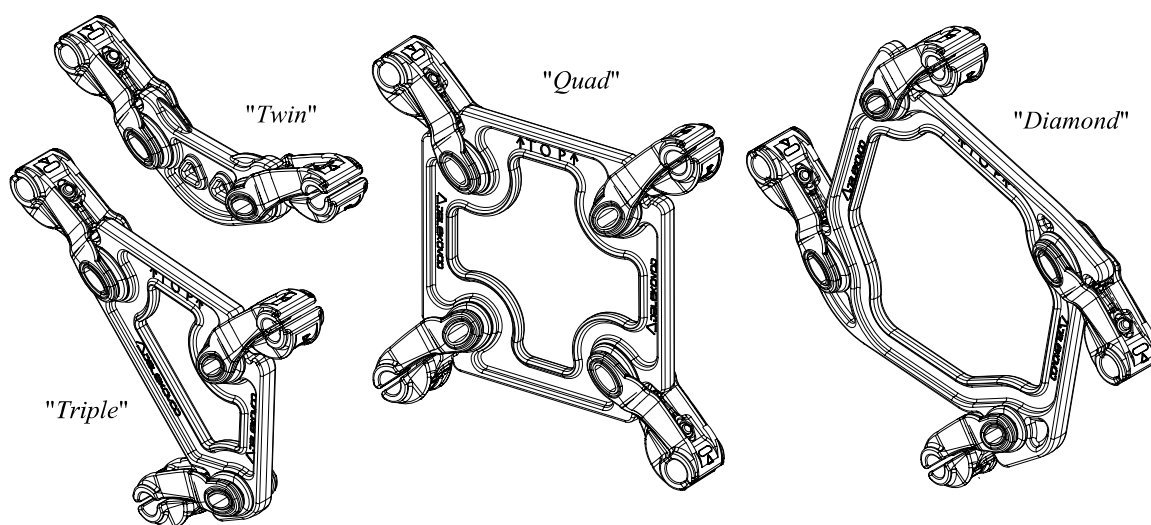
Potrebna krutost u horizontalnoj ravnini se može postići podešenjem kuta ruku rastojnika-prigušivača, pa su tako rastojnici-prigušivači s horizontalnim rukama vrlo kruti (u horizontalnoj ravnini). Podešavanjem kuta ruku rastojnika-prigušivača mogu se smanjiti aeolske vibracije. Ruke koje zatvaraju kut s obzirom na horizontalnu ravninu prisiljavaju vodič da vibrira pod tim kutom u odnosu na vertikalnu ravninu, te na taj način smanjuje energiju vjetra koja se unosi u sustav.

Karakteristike rastojnika-prigušivača je potrebno optimizirati. Primarno je zaštititi vodič od aeolskih vibracija. Potrebno je i kontrolirati intenzitet oscilacija podraspona s odgovarajućim razmještajem rastojnika-prigušivača. Da bi rastojnik-prigušivač sudjelovao u prigušenju vibracija potrebno je da duljine podraspona budu međusobno različite, kako svi rastojnici-prigušivači ne bi bili istovremeno u čvorovima vibracija.

Povećanom masom tijela rastojnika-prigušivača postiže se veća efikasnost rastojnika i na relativno niskim frekvencijama s obzirom na aeolske vibracije. Najnepovoljniji slučaj aeolskih vibracija je kod horizontalnog snopa s dva vodiča. Tu je prisutan značajan utjecaj mase i momenta tromosti tijela rastojnika-prigušivača, te se na središnje tijelo postavljaju dodatne

ekscentrične mase kako bi se masa i moment tromosti povećali. S druge strane, da bi se izbjeglo formiranje prisilnih čvorova vibracija na vodiču, potrebno je da ruke i stezaljke budu što lakše. Prisilni čvorovi vibracija su vrlo nepogodni jer stvaraju velika naprezanja vodiča uz stezaljke, a i rastojnik-prigušivač ne prigušuje energiju acolskih vibracija.

Postoje različiti tipovi rastojnika-prigušivača (Slika 2.4.). Sastoje se od geometrijski jednakih gumenih zglobova, ruku i vijaka, a razlikuju se u obliku tijela. Materijali koji se koriste za izradu su Al legura i EPDM guma [8].



Slika 2.4. Različiti tipovi rastojnika-prigušivača [8]

### 3. KONTAKT

Osnovna motivacija u razvoju kontaktne mehanike sadržana je u potrebi što točnijeg poznavanja raspodjele kontaktnih pritisaka na površini tijela te složenih efekata koji nastaju kao posljedica te interakcije. Objektivna znanstvena potreba za zasebnim proučavanjem mehanike kontakta postala je široko prepoznata već 1882. godine objavljivanjem značajnog rada njemačkog fizičara H. R. Hertza, pod naslovom *Über die Berührung Fester Elastischer Körper* (prev. *O kontaktu elastičnih tijela*). To se smatra začetkom kontaktne mehanike kao zasebne discipline unutar okvira teorije elastičnosti [9].

#### 3.1. Vrste kontakta

U ovom odlomku su opisni neki karakteristični problemi koji se javljaju u kontaktnoj mehanici. Međusobnom kombinacijom tih kategorija kontakata može se okarakterizirati svaki realni kontaktni problem [9].

*Nekomfortni kontakt* je kontakt pri kojem se tijela u odsutnosti vanjskog opterećenja dodiruju samo u jednoj točki (npr. kontakt dviju kugli ili kugle i ravne plohe) ili duž linije (npr. kontakt valjka i ravne plohe). Uvođenjem vanjskog opterećenja kontakt se uslijed deformacija počinje širiti na površinu koja okružuje točku ili liniju početnog kontakta, međutim dimenzije te površine u domeni elastičnih deformacija kod nekomfortnog kontakta uvijek ostaju vrlo malene u usporedbi s dimenzijama samih tijela. Kontaktna površina kod ovakvih problema nije unaprijed poznata i ovisi o vrsti, smjeru i intenzitetu opterećenja te o svojstvima materijala. Kako su kontaktna naprezanja često vrlo velika u neposrednoj blizini zone kontakta, ta se kontaktna naprezanja kod nekomfortnog kontakta u svakom smislu može i treba smatrati određenom vrstom koncentracije naprezanja, a unutar promatranog tijela ih se uglavnom može razmatrati neovisno o drugim naprezanjima i neovisno o njegovu obliku te vrsti i prostornom rasporedu oslonca.

*Komfortni kontakt* ostvaruje se između tijela koja se i u odsutnosti vanjskog opterećenja dodiruju na površini koja je usporediva s dimenzijama tijela (npr. kontakt baze valjka položenog na ravnu plohu) ili koja će u opterećenom stanju uslijed deformacija stvoriti kontaktnu površinu dimenzija usporedivih s dimenzijama samih tijela (npr. vratilo u kliznom ležaju gdje postoji mala zračnost). Kontaktna će površina u prvom slučaju biti konstantna i unaprijed poznata, dok će u drugom slučaju, kao i kod nekomfortnog kontakta, također ovisiti o parametrima opterećenja i karakteristikama materijala. Za komforne je kontakte karakteristično da kontaktna



naprezanja značajnim iznosom sudjeluju u općoj raspodjeli naprezanja u čitavom volumenu tijela i često ih se ne može razmatrati odvojeno.

*Kontakt bez trenja* idealizacija je stvarnih kontakata i može se smatrati dovoljno dobrom aproksimacijom samo u slučaju proučavanja kontakta vrlo glatkih i/ili dobro podmazanih površina koje slobodno mogu klizati jedna niz drugu, tj. bez otpora od ikakvog praktičnog značenja. Preko kontaktne površine se uslijed djelovanja vanjskog opterećenja s jednog tijela na drugo mogu prenositi samo normalne komponente kontaktnih pritisaka, a tangencijalne su sile u svakoj kontaktnoj točki uvijek jednake nuli.

*Kontakt s trenjem* vrsta je kontakta do koje dolazi u svim realno postojećim kontaktnim problemima. Kod takvog je kontakta klizanje u točkama dodira suprotstavljeno silom trenja, što znači da je za pojavu međusobnog klizanja površina, navedenu silu trenja potrebno nadvladati silama koje djeluju na pravcu tangencijalnom na kontaktnu površinu. Sama sila trenja  $F_T$  u svakoj pojedinoj točki kontakta u svojem intenzitetu ovisi o svojstvima promatranih površina (hrapavost, prisutnost maziva i sl.), makroskopski objedinjenih u iznosu faktora trenja  $\mu$ , te o intenzitetu normalne komponente  $p_n$  kontaktnog pritiska u toj istoj promatranoj točki. Takva se zavisnost uobičajeno izražava prema vrlo dobro poznatoj relaciji  $F_T = \int_{(A)} \mu p_n dA$ . Ovisno o odnosu intenziteta tangencijalnih komponenti  $p_t$  i normalnih komponenti kontaktnih pritisaka, a uz pretpostavku Coulombova zakona trenja, skupovi točaka na kontaktnoj površini mogu tvoriti zone u stanju (eng. *stick*), u kojima su tangencijalne komponente manje od sila trenja, ili pak u stanju klizanja (eng. *slip*), kada je sila trenja nadvladana. Uzimanje trenja u obzir čini problem matematički kompleksnijim i svaki model čini nelinearnim, međutim njegovim se zanemarivanjem u krajnji rezultat analize nerijetko uvodi značajna pogreška.

### 3.2. Hertzov kontakt

Hertzov kontakt ili Hertzov problem pojam je od izuzetnog značenja u kontaktnoj mehanici, prvenstveno s toga što se njime uz zadovoljavajući stupanj točnosti u praksi može aproksimirati veliki broj realnih nekomfortnih kontaktnih problema. Svaki Hertzov kontakt mora zadovoljiti sljedeće uvjete [9], [10] i [11]:

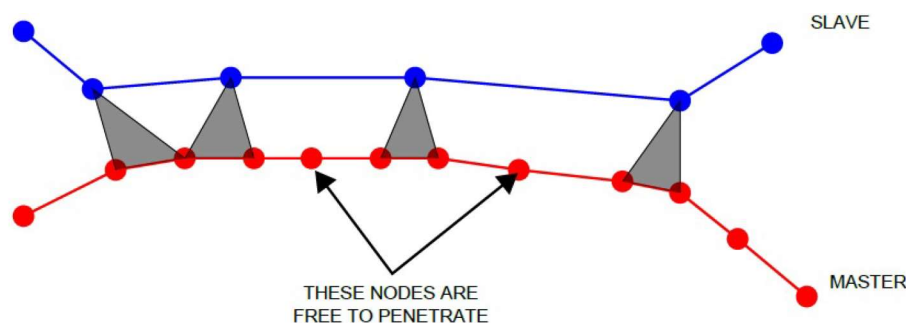
- površine tijela u kontaktu neprekidne su funkcije prostornih koordinata do uključno svoje druge derivacije,
- profili kontaktnih površina tvore nekomfortan kontakt što implicira malu poluširinu a kontaktne površine u usporedbi s polumjerima zakrivljenosti tijela i s njihovim ukupnim dimenzijama,
- pomaci i deformacije su mali, a tijela homogena i izotropna – time razmatranje problema uvijek ostaje unutar okvira linearne teorije elastičnosti, bez razmatranja materijalne ili geometrijske nelinearnosti,
- naprezanja i deformacije u svakom se od dvaju tijela u kontaktu može razmatrati na način da se svako tijelo odvojeno promatra kao elastični poluprostor na kojeg djeluje rezultirajući kontaktni pritisak – ovako pojednostavnjenje danog problema implicitno sadrži sve elemente prvih triju navedenih pretpostavki i u stvari predstavlja analitičku implementaciju zanemarenja utjecaja oblika tijela i prostornog rasporeda njegovih oslonca,
- površine se smatraju idealno glatkim, stoga između njih nema trenja.

U skupinu ne-Hertzovih kontakata spadaju svi oni slučajevi koji ne zadovoljavaju barem jednu od prethodno navedenih pretpostavki. U tu skupinu spadaju vrste komfortnih kontakata, kontakti s (nezanemarivim) trenjem, elastoplastični kontakti, višestruki elastični nekomfortni kontakti (npr. valjna tijela u valjnim ležajevima), kontakti koji mogu uključivati velike pomake (npr. kod nemetalnih hiperelastičnih materijala) itd. Rješavanje takvih problema uz pretpostavke Hertzove teorije gotovo uvijek dovodi do nezadovoljavajuće točnosti rezultata, stoga se može doći do zaključka kako svaki realni kontaktni problem spada u klasu ne-Hertzovih problema te kako Hertzova formulacija uvijek i bez iznimke predstavlja samo aproksimaciju stvarnih uvjeta koji vladaju u zoni realnih kontakata. Kontaktni problem stoga spada u klasu ne-Hertzovih kontakata iz razloga nezadovoljavajuće točnosti rezultata koju za njegov opis pruža Hertzova teorija.

### 3.3. Definiranje kontakta u programskom paketu *Abaqus*

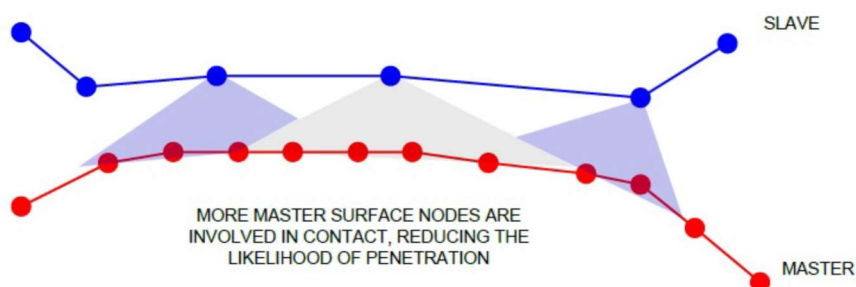
Prilikom definiranja kontakta u programskom paketu *Abaqus* potrebno je što točnije definirati kontaktnu interakciju dvije plohe. Prvo treba odabrati način na koji će se kontakt diskretizirati. Programski paket *Abaqus* nudi dvije opcije za diskretizaciju kontakta – *node-to-surface* (čvor-površina), te *surface-to-surface* (površina-površina).

*Node-to-surface* se definira kontaktom između čvorova na *slave* (sporednoj) površini s dijelom *master* (površine) (Slika 3.1.). *Slave* čvorovi ne mogu penetrirati u *master* plohu, dok *master* čvorovima nije striktno zabranjeno prodiranje u *slave* površinu, te u nekim slučajevima dolazi do prodiranja. Dubina prodiranja računa se duž normale na *master* plohu. Prilikom odabira ovakve vrste kontakta potrebno je za *slave* površinu odabrati onu koja ima gušću mrežu konačnih elemenata. Kruća površina treba biti postavljena za *master* plohu [17], [18] i [19].



Slika 3.1. Povezivanje ploha prilikom odabira *node-to-surface* formulacije [21]

*Surface-to-surface* kontakt definira se između većeg područja koje okružuje svaki *slave* čvor te dijela površine koji okružuje *master* plohu (Slika 3.2.). Ako *master* ploha ima gušće definiranu mrežu konačnih elemenata onda se pokušava uključiti što više *master* čvorova u kontakt s određenim dijelom *slave* plohe. Ali preporuka je da se *slave* površina dodijeli tijelu s gušćom mrežom konačnih elemenata, jer to vodi do točnijih rezultata [17], [18] i [19]. Dubina prodiranja mjeri se duž normale na *slave* plohu.



Slika 3.2. Povezivanje ploha prilikom odabira *surface-to-surface* formulacije [21]

Korištenje *S-to-S* metode smanjuje vjerojatnost velikog lokalnog prodiranja kroz površinu, smanjuje osjetljivost na dodjelu *master* i *slave* uloga, povećava preciznost rezultata prilikom računanja kontaktnog pritiska (što je vezano uz bolju raspodjelu kontaktne sile između *master* čvorova). *S-to-S* metoda najbolje radi kada površine u kontaktu imaju približno suprotni smjer normala. *S-to-S* metoda bolje rješava i kontaktne probleme zadane preko rubova jer zadaje dva ograničenja (eng. *constraint*), što daje stabilnost kontaktu i vodi do točnijih rješenja, dok *N-to-S* metoda zadaje samo jedno ograničenje što nije stabilno i vodi do velikih penetracija. *S-to-S* metoda koristi više čvorova po ograničenju, te je veći dio modela uključen u kontakt što dovodi do veće potrošnje računalnih resursa.

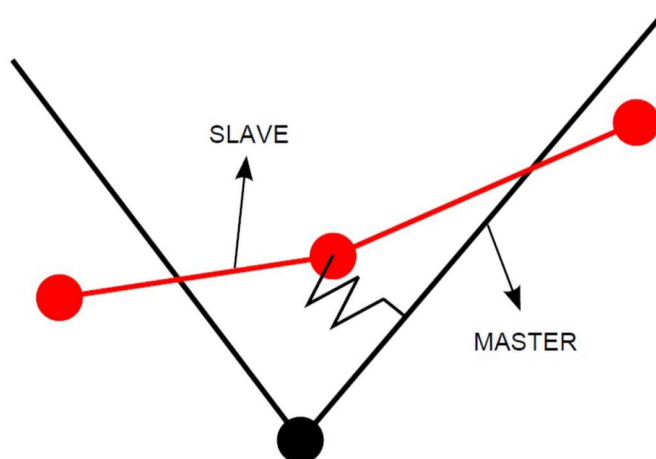
Nakon što je odabrano na koji će se način ostvariti kontakt između dvije plohe, potrebno je odrediti način na koji će se taj kontakt ponašati uslijed klizanja plohe o plohu. Programski paket *Abaqus* nudi dvije opcije: *small-sliding* i *finite-sliding*.

*Small-sliding* formulacija ima pretpostavke da je relativno gibanje *slave* čvora malo u usporedbi s lokalnom zakrivljenošću *master* plohe te stvarne veličine *master* plohe. Svaki *slave* čvor ima svoju tangencijalnu ravninu na *master* plohi, te su čvorovi spriječeni da prodiru u nju. Prednost ove metode je što smanjuje trošenje računalnih resursa po iteraciji te nalazi konvergirana rješenja u manje iteracija. Nedostatak ove metode je što može dovesti do netočnih rezultata ukoliko tangencijalno gibanje plohe o plohu nije malo. Odgovornost za taj problem je na korisniku, te je on dužan odrediti zadovoljava li odabrani model navedenu pretpostavku. Preporuka je da se koristi *finite-sliding* formulacija ukoliko korisnik ne želi brinuti oko točnosti pretpostavke.

Prilikom *finite-sliding* metode, točka interakcije na *master* plohi se mijenja s obzirom na stvarno trenutno stanje površine. Omogućuje sva proizvoljna gibanja dviju površina koje su u kontaktu te uključuje nelinearnost u kontakt jer pretpostavlja velike deformacije. Ova metoda omogućuje i relativno razdvajanje, klizanje i rotaciju površina.

Prilikom definiranja kontakta potrebno je i odrediti ograničenja prijanjanja između dvije površine. Jedan od načina za definiranje ograničenja prijanjanja koje nudi programski paket *Abaqus* je *penalty* metoda. Ova metoda se koristi za općenitije tipove kontaktnih problema (npr. kontakt dva kruta tijela). *Penalty* metoda provodi slabija ograničenja prijanjanja te se koristi u situacijama kada se dodjeljuje više kontakata po čvoru, kada se kontakt ostvaruje između dva kruta tijela, ili kada su u kontaktu dvije površine koje su uključene u druge vrste ograničenja. U *penalty* metodi uvodi se virtualna opruga krutosti *c* koja se veže na čvorove koji žele

penetrirati u površinu s kojom su u kontaktu te ih u tome sprječava (Slika 3.3.). Krutost opruge se može podesiti, a povećavanje krutosti virtualne opruge povećava vrijeme i računalne resurse potrebne za analizu.



**Slika 3.3. Virtualna opruga koja se uvodi za zadovoljavanje kontaktnih ograničenja [21]**

Druga opcija koju programski paket *Abaqus* nudi za ograničenja prijanjanja između dvije površine je metoda Lagrangeovih multiplikatora. U ovoj metodi nema relativnog gibanja između dviju površina dok tangencijalno smično naprezanje  $\tau$  ne dosegne kritičnu vrijednost. Ova metoda povećava veličinu analize dodavanjem više stupnjeva slobode u model, te često i povećavanjem broja potrebnih iteracija za dobivanje konvergentnih rješenja. Ako postoji jaka interakcija između *slipping/sticking* (klizanje/prodiranje) uvjeta i kontaktnog naprezanja, može doći do potrebe za iteracijom na više mjesta između *sticking* i *slipping* uvjeta, te će se spriječiti konvergencija rješenja. Zbog potrebe za dodatnom potrošnjom računalnih resursa, preporuka je da se ova metoda koristi samo u slučajevima kada je *stick/slip* ponašanje od najveće važnosti za konačan rezultat analize, kao npr. model trošenja (eng. *fretting*) između dva tijela. U slučajevima kada se analiziraju metalne komponente ili za slučajeve kontakta gumenih komponenti točnost razlučivanja *stick/slip* ponašanja nije dovoljno bitno da bi opravdalo dodatne troškove računalnih resursa.

## 4. NELINEARNA ANALIZA

Rješenja mnogih inženjerskih problema temelje se na linearnoj aproksimaciji. Linearne aproksimacije se provode uz sljedeće pretpostavke [22]:

- pomaci su mali,
- vrijedi linearni Hookeov model za materijal,
- opterećenja su konzervativna (ne mijenjaju smjer).

Jednadžba koja opisuje linearno ponašanje u metodi konačnih elemenata glasi

$$\mathbf{KV} = \mathbf{R}. \quad (4.1)$$

gdje je  $\mathbf{K}$  konstantna matrica krutosti,  $\mathbf{V}$  je vektor pomaka u čvorovima, a  $\mathbf{R}$  je vektor čvornih sila [22].

Karakteristike rješenja ovakvog linearnog problema su:

- pomaci su proporcionalni opterećenju,
- krutost strukture je neovisna o vrijednosti opterećenja (konstantna je).

U stvarnosti, ponašanje konstrukcija je nelinearno, ali odstupanja od linearnog modela su najčešće mala i u većini slučajeva su zanemariva.

Postoje slučajevi gdje linearna aproksimacija nije dovoljna za pronalaženje dovoljno točnog rješenja (pomaci više nisu direktno proporcionalni opterećenju) te je potrebno koristiti nelinearni pristup za koji nelinearna jednadžba glasi

$$\mathbf{R}(\mathbf{V}) = \mathbf{F}. \quad (4.2)$$

gdje je  $\mathbf{R}$  vektor čvornih sila,  $\mathbf{V}$  vektor pomaka u čvorovima, a  $\mathbf{F}$  sila opterećenja. Problem tada nije moguće riješiti u jednom koraku zbog nelinearnog odziva, već se proces pronalaženja rješenja temelji na inkrementalno – iterativnim metodama koje su moguće tek uz linearizaciju izraza

$$\mathbf{K}(\mathbf{V}, \mathbf{R}) \mathbf{V} = \mathbf{R}, \quad (4.3)$$

gdje je krutost  $\mathbf{K}$  funkcija trenutnog stanja pomaka  $\mathbf{V}$  i opterećenja  $\mathbf{R}$  [26].

Pritom se iz osnovnog ravnotežnog stanja (OS) traži ravnoteža bliskog stanja (BS) koje je definirano prirastom inkrementalnog opterećenja  $\Delta \mathbf{R}$  i/ili pomaka  $\Delta \mathbf{V}$ .

Postoje različiti tipovi nelinearnosti:

- geometrijska – veliki pomaci, velike deformacije,

- materijalna – ponašanje materijala nelinearno (nelinearna elastičnost, elastoplastičnost, visko-elastičnost, visko-plastičnost, plastičnost, puzanje),
- nelinearnost rubnih uvjeta – najčešći slučaj je kontaktni problem,

te kombinacija više vrsta nelinearnosti.

Prilikom provođenja nelinearne analize potrebno je pridržavati se sljedećih pravila [22]:

- princip superpozicije se ne može primijeniti, te se zato ne mogu kombinirati rezultati nekoliko slučajeva opterećenja
- slijed primjene opterećenja može biti važan, a posebno plastične deformacije ovise o redoslijedu opterećenja što je razlog podjele opterećenja na male inkremente
- strukturno ponašanje konstrukcije može biti izrazito neproporcionalno primijenjenom opterećenju
- početno stanje naprezanja može biti vrlo važno (zaostala naprezanja itd.).

#### 4.1. Inkrementalna metoda

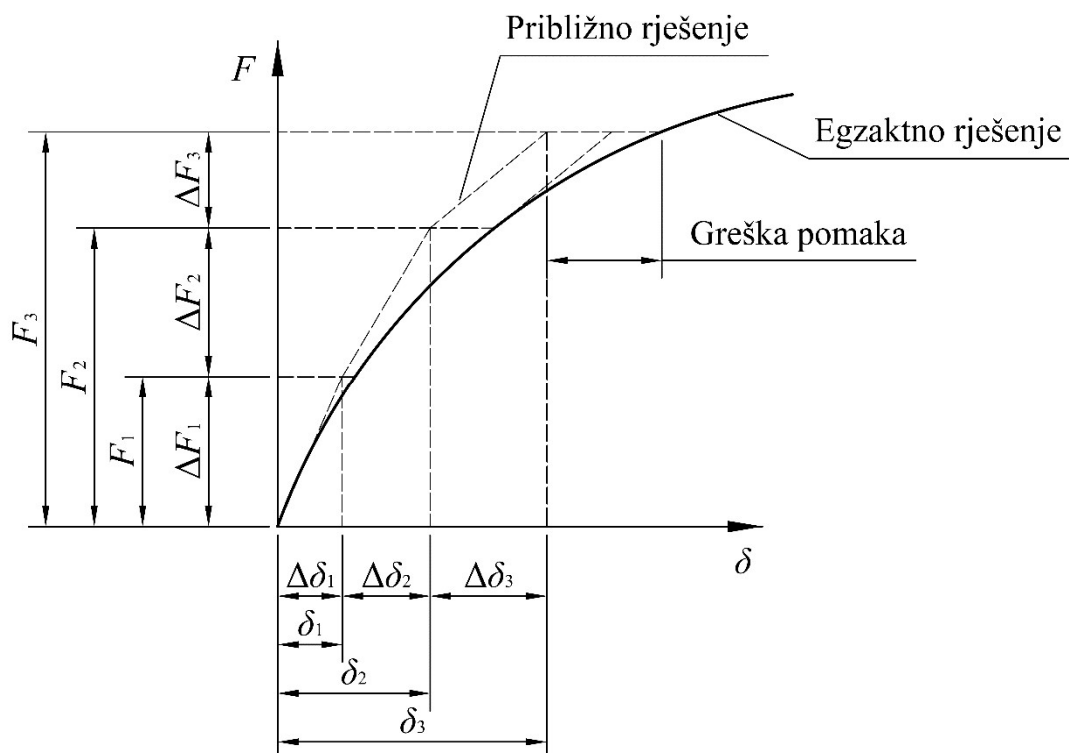
Prilikom korištenja ove metode vektor sila opterećenja  $\mathbf{F}$  dijeli se na male inkremente  $\Delta\mathbf{F}_i$ . Inkrementi pomaka  $\Delta\boldsymbol{\delta}_i$  računaju se iz skupa simultanih linearnih jednadžbi

$$\mathbf{K}_{T(i-1)}\Delta\boldsymbol{\delta}_i=\Delta\mathbf{F}_i, \quad (4.4)$$

gdje je

$$\boldsymbol{\delta}_i=\boldsymbol{\delta}_{i-1}+\Delta\boldsymbol{\delta}_i, \quad (4.5)$$

$\mathbf{K}_{T(i-1)}$  je iteracija inkrementa matrice krutosti, a  $\boldsymbol{\delta}_{i-1}$  je iteracija inkrementa vektora pomaka.



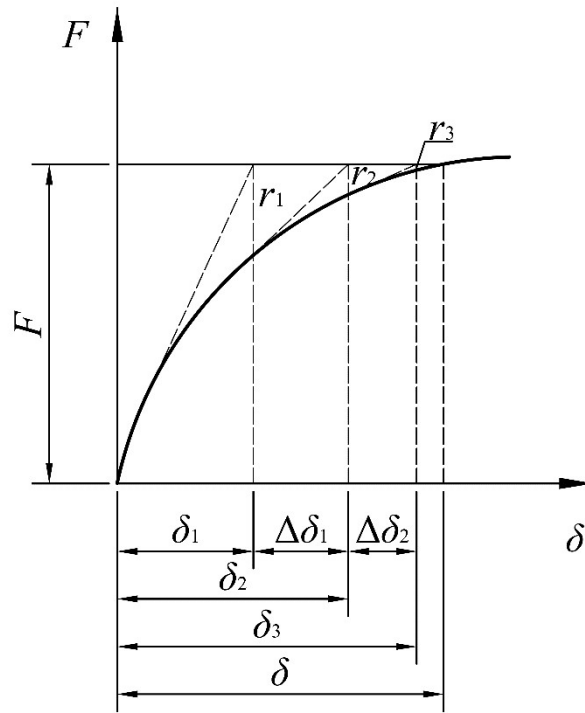
Slika 4.1. Inkrementalna metoda

Slika 4.1 pokazuje postupak računanja inkrementalnom metodom. Očito je da se greška između aproksimacije i točnog rješenja postupno akumulira. Kako bi se greška smanjila potreban je veći broj manjih inkrementalnih koraka.

#### 4.1.1. Newton-Raphsonova metoda

Newton-Raphsonova metoda jedna je od najčešće korištenih numeričkih iterativnih metoda u praksi [17], [18] i [19]. Slika 4.2 shematski prikazuje Newton-Raphsonovu metodu.





Slika 4.2. Standardna Newton-Raphsonova metoda

Uz pretpostavku da su poznati početni pomaci  $\delta_0$ , prva iteracija čvornih pomaka za silu  $F$  računa se rješavanjem seta linearnih jednadžbi [22]

$$\mathbf{K}_{T(0)} \delta_1 = F, \quad (4.6)$$

gdje je

$$\mathbf{K}_{T(0)} = \mathbf{K}_T(\delta_0), \quad (4.7)$$

tangencijalna matrica krutosti dobivena iz početnih pomaka.

Kako početni pomaci  $\delta_1$  najvjerojatnije nisu točni, jednadžba ravnoteže (4.2) nije zadovoljena, te vrijedi slijedeći izraz:

$$\mathbf{R}(\delta_1) \neq F, \quad (4.8)$$

što znači da postoje nebalansirane čvorne sile

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}(\delta_1) - F. \quad (4.9)$$

Računanjem nove tangencijalne matrice krutosti

$$\mathbf{K}_{T(1)} = \mathbf{K}_T(\delta_1), \quad (4.10)$$

i rješavanjem novog sustava algebarskih linearnih jednadžbi

$$\mathbf{K}_{T(i)} \Delta \delta_1 = \mathbf{r}_1, \quad (4.11)$$

dobije se točnije rješenje

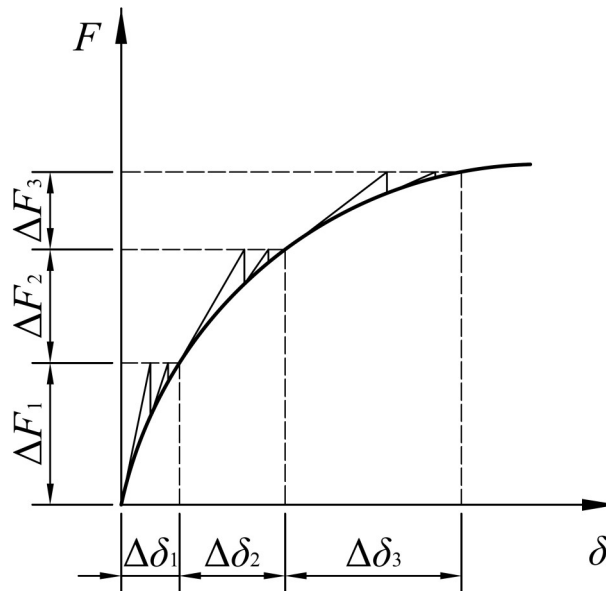
$$\delta_2 = \delta_1 + \Delta \delta_1, \quad (4.12)$$

ako nije zadovoljen uvjet

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}(\delta_2) - \mathbf{F} \neq 0, \quad (4.13)$$

postupak se ponavlja dok se uvjet ne zadovolji [22].

Slika 4.3 shematski prikazuje kombinaciju Newton-Raphsonove metode i inkrementalne metode.



**Slika 4.3. Kombinacija Newton-Raphson i inkrementalne metode**

Newton-Raphsonova metoda vrlo se često kombinira sa inkrementalnom metodom.

## 4.2. Nelinearni konstitutivni model

Kada se opisuju elastične deformacije, opća ovisnost naprezanja i deformacija može se izraziti na sljedeći način: svaka komponenta naprezanja  $\sigma_{ij}$  ovisi o svakoj komponenti deformacije  $\varepsilon_{ij}$  i obratno [24]. Ta ovisnost se naziva poopćeni Hookeov zakon te se izražava

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}, \quad (4.14)$$

gdje je  $D_{ijkl}$  matrica elastičnosti predstavljena tenzorom četvrtog reda, a naprezanje  $\sigma_{ij}$  i deformacije  $\varepsilon_{ij}$  su tenzori drugog reda. U općem slučaju matrica elastičnosti  $D$  sastoji se od 36

komponentata koji se opisuju s 21 nezavisnom konstantom materijala (vrijedi za anizotropne materijale). Ako je materijal homogen, izotropan i linearan, broj nezavisnih konstanti smanjuje se na samo dvije: modul elastičnosti  $E$  i modul smicanja  $G$ .

Tenzor elastičnosti (izraz (4.14)) zapisan u indeksom obliku glasi [24]

$$D_{ijkl} = \lambda_{\text{Lam}} \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_{\text{Lam}} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (4.15)$$

gdje su  $\lambda_{\text{Lam}}$  i  $\mu_{\text{Lam}}$  Laméove konstante, a  $\delta_{ij}$  je Kroneckerov simbol.

Konstanta  $\lambda_{\text{Lam}}$  iz izraza (4.15) naziva se prva Laméova konstanta te glasi

$$\lambda_{\text{Lam}} = \frac{\nu \cdot E}{(1+\nu) \cdot (1-2 \cdot \nu)} = \frac{2 \cdot G \cdot \nu}{1-2 \cdot \nu} = \frac{G \cdot (E-2 \cdot G)}{3 \cdot G-E}. \quad (4.16)$$

Konstanta  $\mu_{\text{Lam}}$  iz izraza (4.15) naziva se druga Laméova konstanta te glasi

$$\mu_{\text{Lam}} \equiv G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} = \frac{\lambda \cdot (1-2 \cdot \nu)}{2 \cdot \nu}. \quad (4.17)$$

Iz izraza (4.17) se može vidjeti da je druga Laméova konstanta  $\mu_{\text{Lam}}$  jednaka modulu smicanja  $G$  [24].

Iz izraz (4.16) i (4.17) je vidljivo da Laméove konstante  $\lambda_{\text{Lam}}$  i  $\mu_{\text{Lam}}$  ovise samo o modulu elastičnosti  $E$  i Poissonovom faktoru  $\nu$ .

Volumenski modul elastičnosti (modul stlačivosti)  $K$  izražava se pomoću sljedećeg izraza:

$$K = \frac{E}{3 \cdot (1-2 \cdot \nu)} = \frac{2 \cdot G \cdot (1+\nu)}{3 \cdot (1-2 \cdot \nu)}. \quad (4.18)$$

U slučaju da je Poissonov faktor  $\nu = 0,5$ , vrijednost modula stlačivosti  $K$  teži u beskonačno, što znači da je kontinuum nestlačiv i svaka promjena izohorna, tj. vrijedi relacija  $V/V_0 = 1$ . Maksimalni iznos  $\nu$  stoga može biti 0,5, što je uobičajena vrijednost za gumu [25].

#### 4.2.1. Hiperelastični materijal

Najlakši način za definiranje nelinearnog elastičnog materijala za jednoosno opterećenje je totalna formulacija (eng. *Total formulation*), izražena izrazom:

$$\sigma = E_s(\varepsilon) \cdot \varepsilon, \quad (4.19)$$

gdje su naprezanje  $\sigma$  i deformacija  $\varepsilon$  izraženi preko sekantnog modula elastičnosti  $E_s$ .

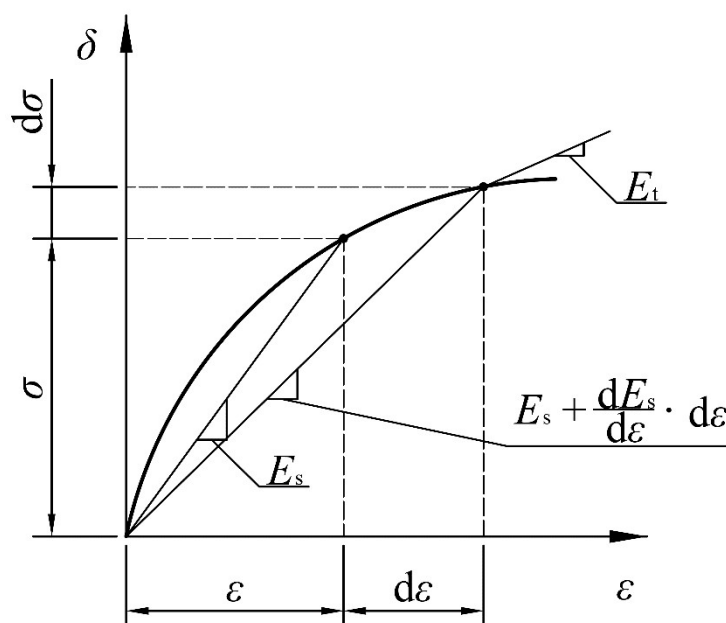
U hipoelastičnom formatu<sup>1</sup>, odnos između diferencijala deformacije i naprezanja definira se pomoću tangencijalnog modula elastičnosti  $E_t$ .

$$d\varepsilon = E_t \cdot d\sigma. \quad (4.20)$$

Hiperelastični format<sup>2</sup> pretpostavlja postojanje funkcije gustoće energije deformiranja  $U$  i dopunske (eng. *Complementary*) funkcije gustoće energije  $U^*$  [22] te vrijedi

$$\sigma = \frac{dU}{d\varepsilon}, \quad (4.21)$$

$$\varepsilon = \frac{dU^*}{d\sigma}. \quad (4.22)$$



Slika 4.4. Nelinearni elastični model

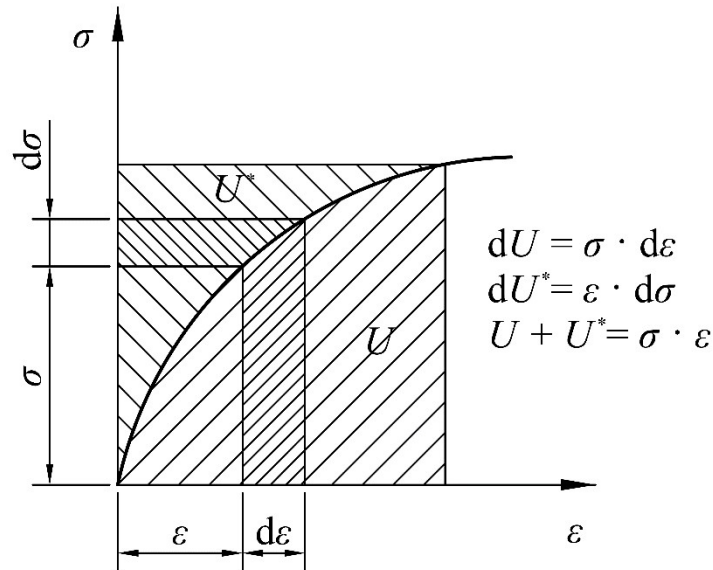
Hiperelastični materijalni model se najčešće koristi za materijale od gume i slične materijale koji imaju velike nelinearne elastične deformacije.

Materijalni modeli za višeosno naprezanje temelje se na generalizaciji jednodimenzionalnog koncepta. npr. u hiperelastičnoj formulaciji komponente tenzora naprezanja računaju se na slijedeći način:

<sup>1</sup> Hipoelastični materijali podržavaju ograničene elastične deformacije uz velike plastične deformacije.

<sup>2</sup> Hiperelastični materijali podržavaju velike elastične deformacije.

$$\sigma = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \quad \text{odnosno} \quad \sigma_x = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_x}, \quad \sigma_y = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_y}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial U}{\partial \gamma_{xy}} \quad \dots \quad (4.23)$$



Slika 4.5. Funkcije gustoće energije deformiranja  $U$  i  $U^*$

Najranija značajna teorija o velikim elastičnim deformacijama, koja je imala značajan utjecaj u svim kasnijim djelovanjima u tom području, je Mooneyeva teorija (1940.) [33] i [34]. Mooneyeva teorija je razvijena u dvije forme – specijalna i opća. Specijalna forma pokriva gotovo sve primjene, a temelji se na pretpostavci da je guma nestlačiva i izotropna u neopterećenom stanju.

U programskom paketu *Abaqus* funkcija  $U$  u punom polinomskom obliku glasi

$$U = U(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J_{el}) = \sum_{i+j=1}^N C_{ij} \cdot (\bar{I}_1 - 3)^i \cdot (\bar{I}_2 - 3)^j + \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i} \cdot (J_{el} - 1)^{2i}, \quad (4.24)$$

gdje su  $\bar{I}_1$  i  $\bar{I}_2$  prva i druga invarijanta devijatora deformacije, dok su  $C_{ij}$  i  $D_i$  materijalne konstante. Jacobijeva determinanta  $J_{el}$  je elastični volumni omjer (eng. *Elastic volume ratio*), prema *Abaqus* dokumentaciji [8]. Materijalni koeficijent  $C_{ij}$  definira smično ponašanje materijala, dok  $D_i$  uključuje (ne)stlačivost. Za indeks  $i = 1$ , izraz koji povezuje  $D_i$  te početni modul stlačivosti  $K_0$  prema [8] glasi

$$N=1 \Rightarrow \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i} \cdot (J_{el} - 1)^{2i} \Rightarrow K_0 = \frac{2}{D_1} = \frac{2 \cdot \mu_0 \cdot (1 + \nu)}{3 \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}. \quad (4.25)$$

Za  $D_1 \approx 0 \text{ MPa}^{-1}$ , tj. potpuno nestlačiv materijal ( $\nu = 0,5$ ), početni modul stlačivosti  $K_0$  teži u beskonačno.

Izraz za glavno istezanje  $\lambda_i$  prema [33] i [34] glasi

$$\lambda_i = \frac{l_i}{L_i}, \quad (4.26)$$

gdje je  $L_i$  početna duljina ispitivanog uzorka, a  $l_i$  trenutna duljina.

Invarijante istezanja prema [33] i [34] glase

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad (4.27)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2, \quad (4.28)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 \cdot \lambda_3^2. \quad (4.29)$$

Za nestlačive materijale vrijedi da je  $I_3 = 1$ , te je  $U = f(I_1, I_2)$ .

Izrazi za invarijante  $\bar{I}_1$  i  $\bar{I}_2$  glase [35]

$$\bar{I}_1 = J^{-2/3} \cdot I_1, \quad (4.30)$$

$$\bar{I}_2 = J^{-4/3} \cdot I_2. \quad (4.31)$$

Jacobijeva determinanta  $J_{el}$  glasi

$$J_{el} = \frac{J}{J_t}, \quad (4.32)$$

gdje za  $\Delta t \cong 0$  (gdje je  $\Delta t$  temperaturna razlika) vrijedi da je  $J_t = 1$  (promjena volumena zbog razlika u temperaturi).

Izraz za determinantu  $J$  glasi

$$J = \det(\mathbf{F}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3, \quad (4.33)$$

gdje  $\mathbf{F}$  predstavlja gradijent deformiranja.

Konačni izraz za determinantu  $J$ , za nestlačivi materijal te kada nema promjene temperature ( $\Delta t \cong 0$ ), glasi

$$J = \det(\mathbf{F}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1. \quad (4.34)$$

Ako se izraz za determinantu (4.34) uvrsti u izraz (4.25), vrijedi

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i} \cdot (J_{el} - 1)^{2i} = 0, \quad (4.35)$$

jer je  $J_{el} = 1$ .

Za  $N = 1$ , te kada se izraz (4.34) uvrsti u izraz (4.32) te zatim u izraz (4.24) dobije se izraz

$$U = C_{10} \cdot (I_1 - 3) + C_{01} \cdot (I_2 - 3), \quad (4.36)$$

što je konačni sređeni izraz za gustoću unutarnje energije deformiranja  $U$  uz uvjet nestlačivosti.

U području malih deformacija mora biti održana kompatibilnost s linearno elastičnim modelom (Hookeov zakon), tj. vrijedi  $\sigma_0 \approx \sigma$ ,  $\varepsilon_0 \approx \varepsilon$ , a izraz za početni modul smicanja  $G_0$  glasi

$$G_0 = 2 \cdot (C_{10} + C_{01}). \quad (4.37)$$

Kada se uvrsti  $\nu \cong 0,5$  i  $\lambda \cong 1$  u izraz

$$E_0 = \left. \frac{\partial \sigma_{0(M-R)}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} = 3 \cdot G_0, \quad (4.38)$$

te sve zajedno uvrsti u izraz (4.37) dobije se

$$E_0 = 6 \cdot (C_{10} + C_{01}) \quad . \quad (4.39)$$

Analogna relacija konzistencije za modul elastičnosti  $K_0$  prikazan je izrazom (4.25).

Za dobivanje eksplicitne ovisnosti naprežanja  $\sigma$  o deformaciji  $\varepsilon$ , izraz (4.36) potrebno je derivirati prema izrazu (4.23) te se dobije izraz za Mooney-Rivlin model

$$U = U(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Rightarrow \sigma_{0(M-R)} = \frac{\partial U}{\partial \lambda}. \quad (4.40)$$

Izraz za varijablu  $\lambda$  glasi

$$L \equiv l_0 \Rightarrow \lambda = \frac{l}{l_0} = 1 + \frac{l - l_0}{l_0} = 1 + e_n, \quad (4.41)$$

gdje  $e_n$  označava nominalnu deformaciju. U slučaju jednoosnog stanja naprežanja  $\sigma$  vrijedi

$$\lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad . \quad (4.42)$$

Kada se izraz (4.42) uvrsti u izraze (4.30) i (4.31) dobije se

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda}, \quad (4.43)$$

$$I_2 = \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 = 2 \cdot \lambda + \frac{1}{\lambda^2}. \quad (4.44)$$

Kada se izrazi (4.43) i (4.44) uvrste u izraz (4.36) za unutarnju energiju  $U$ , te nakon deriviranja prema (4.40), dobije se ovisnost nominalnog naprežanja  $\sigma_0$  o nominalnoj deformaciji  $\varepsilon_0$  za Mooney–Rivlin konstitutivni model

$$\sigma_{0(M-R)} = \frac{\partial U}{\partial \lambda} \Rightarrow \sigma_{0(M-R)} = 2 \cdot \left( C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda} \right) \cdot \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right). \quad (4.45)$$

Da bi se izraz (4.45) izrazio u formi stvarnog naprezanja  $\sigma$ , izraz je potrebno pomnožiti s  $\lambda$  ( $\lambda=1+\varepsilon_0$ ) te se dobije

$$\sigma_{(M-R)} = \sigma_{0(M-R)} \cdot \lambda \Rightarrow \sigma_{(M-R)} = 2 \cdot \left( C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda} \right) \cdot \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right). \quad (4.46)$$

U slučaju da je parametar  $C_{01}$  jednak nuli, izrazi (4.45) i (4.46) prelaze u jednostavniju neo-Hooke formu

$$\sigma_{0(N-H)} = 2 \cdot C_{10} \cdot \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right), \quad \sigma_{(N-H)} = 2 \cdot C_{10} \cdot \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right), \quad (4.47)$$

Vidljivo je da je neo-Hooke konstitutivni model varijacija Mooney-Rivlin modela. Izraz (4.25) i dalje vrijedi, dok izraz (4.37) sada glasi

$$G_0 \equiv \mu_0 = 2 \cdot C_{10}. \quad (4.48)$$

Iz toga se može vidjeti da je za definiranje neo-Hooke modela dovoljno poznavanje dvije linearne konstante prema izrazima (4.16), (4.17) i (4.18), npr. Youngov modul  $E$  i Poissonov faktor  $\nu$ .

Ogden i Arruda-Boyce su nešto kompleksniji konstitutivni modeli. Izraz za Ogden konstitutivni model, za jednoosno opterećenje i uz uvjet nestlačivosti materijala te da vrijedi  $I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ , glasi

$$U_{(Og)} = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} \cdot (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \Rightarrow \sigma_{0(Og)} = \sum_{i=1}^N \mu_i \cdot (\lambda^{\alpha_i} - \lambda^{-\alpha_i}) / \lambda. \quad (4.49)$$

Programski paket *Abaqus* za Ogden konstitutivni model koristi izraz

$$U_{(Og)} = \sum_{i=1}^N \frac{2 \cdot \mu_i}{\alpha_i^2} \cdot (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \Rightarrow \sigma_{0(Og)} = \sum_{i=1}^N \frac{2 \cdot \mu_i}{\alpha_i^2} \cdot \left( \lambda_j^{\alpha_i-1} - \lambda_j^{-\frac{1}{2}\alpha_i-1} \right), \quad (4.50)$$

gdje su  $\mu_i$  i  $\alpha_i$  materijalne konstante koje se dobivaju iz eksperimenta.

Izraz za početni modul smicanja  $G_0$  glasi:

$$G_0 \equiv \mu_0 = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i \cdot \alpha_i}{2}, \text{ uz uvjet } \mu_i \cdot \alpha_i > 0, \text{ te } i = 1 \dots N, \quad (4.51)$$



Ukoliko se u izraz (4.50) uvrste vrijednosti  $N = 2$ ,  $\alpha_1 = 2$  i  $\alpha_2 = -2$ , izraz se pretvara u Mooney-Rivlin materijalni model. Ako se uvrsti  $N = 1$  i  $\alpha_1 = 2$  tada se navedeni izraz pretvara u jednostavniji neo-Hooke model.

Izraz za Arruda-Boyce (A-B,  $N = 5$ ) konstitutivni model glasi

$$U_{(A-B)} = \mu \sum_{i=1}^5 \frac{C_i}{\lambda_m^{2i-2}} \cdot (\bar{I}_1^i - 3^i) \Rightarrow \sigma_{0(A-B)} = \sum_{i=1}^N 2 \cdot \mu (\lambda - \lambda^{-2}) \sum_{i=1}^5 \frac{i \cdot C_i}{\lambda_m^{2i-2}} \cdot \bar{I}_1^{i-1}, \quad (4.52)$$

gdje je  $C_1 = 1/2$ ,  $C_2 = 1/20$ ,  $C_3 = 11/1050$ ,  $C_4 = 19/7000$ ,  $C_5 = 519/673\,750$ .

Konstanta  $\mu$  je povezana s početnim modulom smicanja  $G_0$  preko izraza

$$G_0 \equiv \mu_0 = \mu \left( 1 + \frac{3}{5\lambda_m^2} + \frac{99}{175\lambda_m^4} + \frac{513}{875\lambda_m^6} + \frac{42039}{67375\lambda_m^8} \right), \quad (4.53)$$

gdje je  $\lambda_m$  parametar, tj. konstanta materijala (istezanje zaključavanja, eng. *locking stretch*).

Uz uvjet  $\lambda_m \rightarrow \infty$ ,  $\mu$  prelazi u  $\mu_0$ , a Arruda-Boyce model postaje identičan neo-Hooke modelu.

#### 4.2.2. EPDM guma

Materijal gume koja se koristi za rastojnik-prigušivač je EPDM  $72 \pm 5$  Sh° A 20714, što označava tvrdoću 72 prema Shoreu ( $\pm 5$ ), tip A [35].

EPDM (*ethylene-propylene-diene-monomer*) je jedan od najčešće korištenih elastomera. EPDM je klasificiran po ASTM D-1418 standardu. EPDM ima mnoga pozitivna svojstva kao što su otpornost na vruću vodu i paru, deterdžente, kiseline i kemijske otopine, kao i otpornost na ozon, starenje, životinjska i biljna ulja, ultraljubičasto zračenje itd [30]. EPDM je postojan na toplinu, te ima dobra električna izolacijska svojstva (koristi se kao izolator), ima dobra elastična i zamorna svojstva, visoku tvrdoću i izdržljivost.

## 5. VERIFIKACIJA PRIMIJENJENIH KONAČNIH ELEMENATA

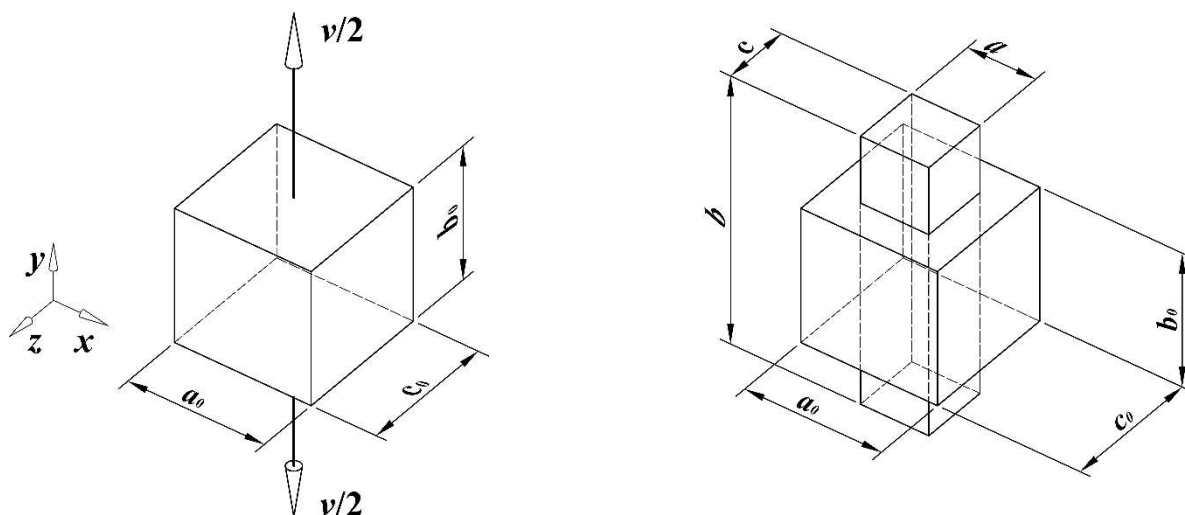
U ovom poglavlju su analitički i numerički riješena dva primjera. Cilj rješavanja ovih primjera je uspoređivanje rezultata u svrhu ispitivanja prikladnosti korištenih konačnih elemenata, nelinearnih modela, nametnutih rubnih uvjeta, te općenito metodologije rješavanja problema kako bi se sa sigurnošću moglo pristupiti znatno kompleksnijoj nelinearnoj analizi proračuna gumenog elementa. Primjeri su riješeni uz pretpostavku da je materijal konstrukcija homogen i izotropan.

### 5.1. Primjer I

U ovom odlomku je prikazano analitičko i numeričko rješenje za prizmatični uzorak u slučaju jednoosnog i dvoosnog opterećenja, te za slučaj ravninskog stanja deformacija. U sva tri slučaja pretpostavljeno je linearno elastično ponašanje materijala, te je primijenjena formulacija malih pomaka i deformacija.

#### 5.1.1. Jednoosno opterećenje elementa

Prizmatični uzorak (Slika 5.1.) podvrgnut je jednoosnom statičkom vlačnom eksperimentu. Opterećenje je zadano kao prisilni kvazistatički pomak  $v$  poznatog iznosa.



Slika 5.1. Statički jednoosno opterećen prizmatični uzorak

Tablica 5.1. prikazuje zadane geometrijsko materijalne karakteristike za slučaj jednoosnog opterećenja.

Tablica 5.1. Parametri za jednoosno opterećenje

$a_0, b_0, c_0$ , mm	$v$ , mm	$E_0$ , GPa	$\nu$
1	1	210	0,3

Iz zadanih podataka, vidljivo je da je uzorak dimenzija jedinične kocke, da je pomak  $v$  zadan tako da iznos inženjerske deformacije u smjeru globalne osi  $y$  iznosi  $\varepsilon_0 = 100\%$ . Zadan je modul elastičnosti  $E_0 = 210\,000$  MPa, te Poissonov faktor  $\nu = 0,3$ .

Analitički i numerički su određeni:

- a) inženjerska naprezanja,  $\sigma_0$
- b) inženjerske deformacije,  $\varepsilon_0$ .

#### 5.1.1.1. Analitičko rješenje

Zadano je opterećenje u smjeru osi  $y$ , što za jednoosno opterećen model znači da su preostala naprezanja jednaka nuli

$$\sigma_{0x} = \sigma_{0z} = 0. \quad (5.1)$$

gdje su  $\sigma_{0x}$  i  $\sigma_{0z}$  inženjerska naprezanja u smjeru osi  $x$  i  $z$ .

Jednadžbe za deformaciju glase prema [23]

$$\varepsilon_{0x} = \frac{1}{E_0} [\sigma_{0x} - \nu(\sigma_{0y} + \sigma_{0z})], \quad (5.2)$$

$$\varepsilon_{0y} = \frac{1}{E_0} [\sigma_{0y} - \nu(\sigma_{0z} + \sigma_{0x})], \quad (5.3)$$

$$\varepsilon_{0z} = \frac{1}{E_0} [\sigma_{0z} - \nu(\sigma_{0x} + \sigma_{0y})], \quad (5.4)$$

gdje su  $\varepsilon_{0x}$ ,  $\varepsilon_{0y}$ ,  $\varepsilon_{0z}$  inženjerske deformacije u smjeru osi  $x$ ,  $y$  i  $z$ ,  $E_0$  je modul elastičnosti.

Zatim je izraz (5.1) uvršten u izraze (5.2), (5.3) i (5.4) te se dobiju izrazi

$$\varepsilon_{0x} = \frac{1}{E_0} [-\nu\sigma_{0y}], \quad (5.5)$$

$$\varepsilon_{0y} = \frac{1}{E_0} [\sigma_{0y}], \quad (5.6)$$

$$\varepsilon_{0z} = \frac{1}{E_0} [-\nu \sigma_{0y}]. \quad (5.7)$$

Iz pomaka u smjeru osi y i dimenzija uzorka može se izračunati iznos deformacije u smjeru osi y iz

$$\varepsilon_{0y} = \frac{\Delta b_0}{b_0} = \frac{(b_0 + \nu) - b_0}{b_0}. \quad (5.8)$$

Uvršten je izraz (5.8) u (5.6) te se dobije

$$\sigma_{0y} = \varepsilon_{0y} \cdot E_0 = 210\,000 \text{ N/mm}^2. \quad (5.9)$$

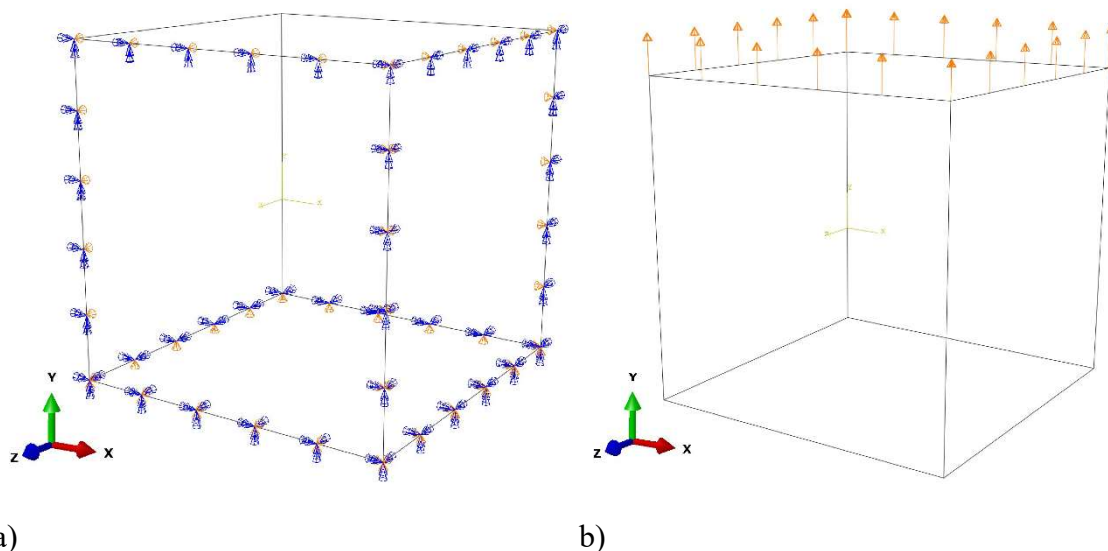
Zatim je uvršten izraz (5.9) u izraze (5.5) i (5.7) iz čega slijedi

$$\varepsilon_{0x} = \varepsilon_{0z} = -0,3. \quad (5.10)$$

#### 5.1.1.2. Numeričko rješenje

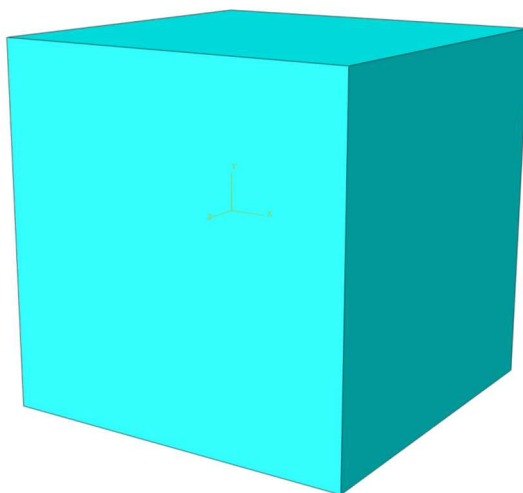
Proračunski model je tri puta simetričan prema geometriji, te jednom prema opterećenju, stoga je korištena jedna osmina geometrije, te polovina prisilnog pomaka.

Na model su primijenjeni rubni uvjeti simetrije u smjeru osi x, y i z (Slika 5.2. a), te je zadan prisilni pomak u smjeru osi y (Slika 5.2. b).



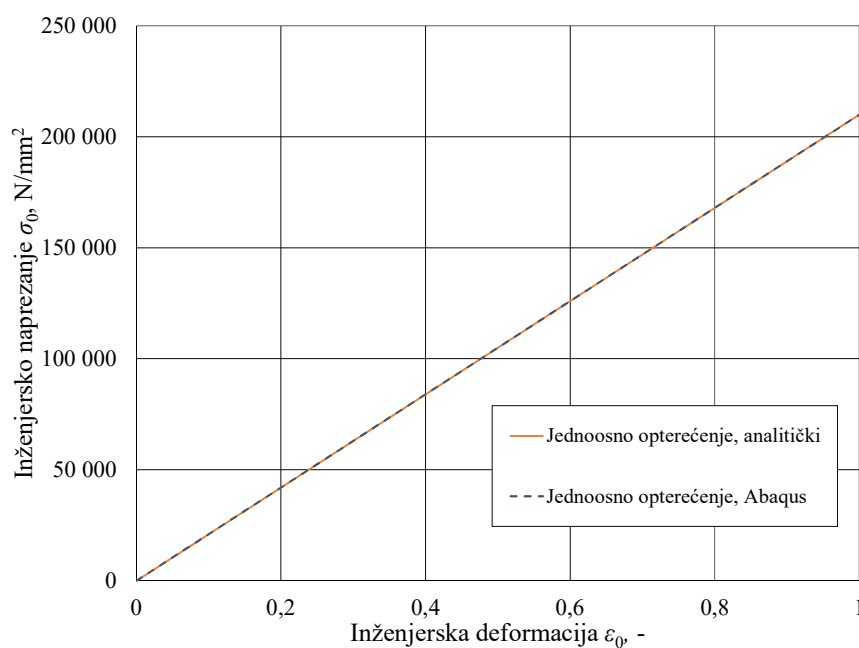
**Slika 5.2. Proračunski model: a) simetrije, b) zadano jednoosno opterećenje**

Mreža modela napravljena je od jednog prizmatičnog 3D elementa, C3D8R, dimenzija 0,5 x 0,5 x 0,5 mm (Slika 5.3.).



**Slika 5.3. Mreža modela načinjena od jednog prizmatičnog 3D elementa**

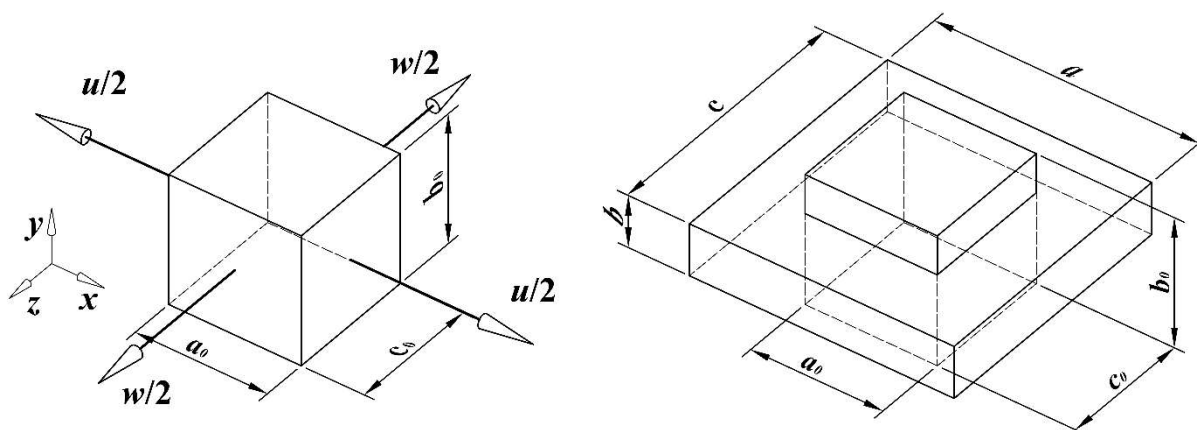
Slika 5.4. prikazuje usporedbu analitičkog i numeričkog rješenja za slučaj jednoosno opterećenog prizmatičnog uzorka, te se može vidjeti da se rješenja podudaraju.



**Slika 5.4. Usporedba analitičkog i numeričkog rješenja za slučaj jednoosnog opterećenja**

### 5.1.2. Dvoosno opterećenje

Prizmatični uzorak (Slika 5.5.) podvrgnut je dvoosnom statičkom vlačnom eksperimentu. Opterećenja su zadana kao prisilni kvazistatički pomaci  $u$  i  $w$ .



Slika 5.5. Statički dvoosno opterećen prizmatični uzorak

Tablica 5.2. prikazuje zadane geometrijsko materijalne karakteristike za prizmatičan uzorak za slučaj dvoosnog opterećenja.

Tablica 5.2. Parametri za dvoosno opterećenje

$a_0, b_0, c_0$ , mm	$u, w$ , mm	$E_0$ , GPa	$\nu$
1	1	210	0,3

Uzorak ima dimenzije jedinične kocke ( $a_0 = b_0 = c_0 = 1$  mm), pomaci  $u$  i  $w$  zadani su tako da iznos inženjerske deformacije u smjeru globalne osi  $x$  i  $z$  iznosi  $\varepsilon_0 = 100\%$ . Zadan je modul elastičnosti  $E_0 = 210\,000$  MPa, te Poissonov faktor  $\nu = 0,3$ .

Analitički i numerički su određeni:

- inženjerska naprezanja,  $\sigma_0$
- inženjerske deformacije,  $\varepsilon_0$ .

#### 5.1.2.1. Analitičko rješenje

Zadan je prisilni pomak u smjeru osi  $x$  i  $z$ . Vlada ravninsko stanje naprezanja što znači da je naprezanje u smjeru osi  $y$

$$\sigma_{0y} = 0. \quad (5.11)$$

Za ravninsko stanje naprezanja vrijede slijedeće jednadžbe [23]

$$\varepsilon_{0x} = \frac{1}{E_0} [\sigma_{0x} - \nu(\sigma_{0z})], \quad (5.12)$$

$$\varepsilon_{0y} = \frac{1}{E_0} \left[ -\nu(\sigma_{0z} + \sigma_{0x}) \right], \quad (5.13)$$

$$\varepsilon_{0z} = \frac{1}{E_0} \left[ \sigma_{0z} - \nu(\sigma_{0x}) \right], \quad (5.14)$$

gdje su  $\varepsilon_{0x}$ ,  $\varepsilon_{0y}$ ,  $\varepsilon_{0z}$  inženjerske deformacije u smjeru osi  $x$ ,  $y$  i  $z$ ,  $E_0$  je modul elastičnosti.

Iz pomaka u smjeru osi  $x$  i  $y$ , te dimenzija elementa može se izračunati iznos deformacije u smjeru osi  $x$  i  $z$

$$\varepsilon_{0x} = \frac{\Delta a_0}{a_0} = \frac{(a_0 + u) - a_0}{a_0} = \varepsilon_{0z}. \quad (5.15)$$

Izraz (5.15) uvršten je u izraz (5.12)

$$\sigma_{0x} = E_0 + \nu \sigma_{0z}. \quad (5.16)$$

te zatim izraz (5.16) u (5.14) iz čega slijedi

$$\sigma_{0z} = \frac{E_0 + \nu E_0}{(1 - \nu^2)} = 300\,000 \text{ N/mm}^2, \quad (5.17)$$

$$\sigma_{0z} = \sigma_{0x}. \quad (5.18)$$

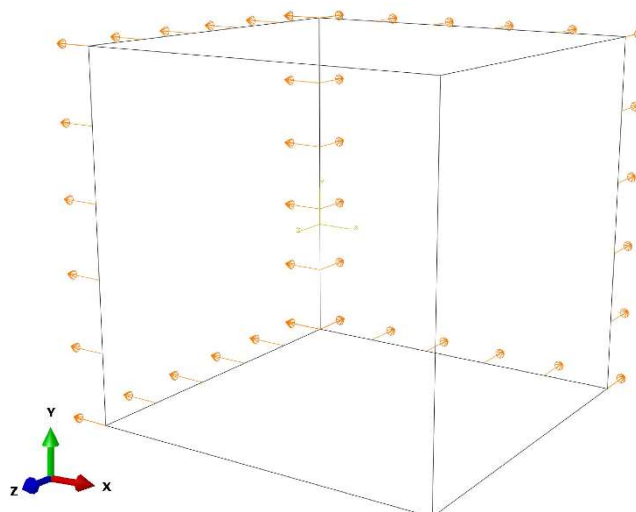
Izrazi (5.17) i (5.18) uvršteni su u izraz (5.13) te se dobije

$$\varepsilon_{0y} = -0,8571. \quad (5.19)$$

#### 5.1.2.2. Numeričko rješenje

Proračunski model je tri puta simetričan prema geometriji te jednom prema opterećenju, stoga je korištena jedna osmina geometrije i polovina prisilnih pomaka.

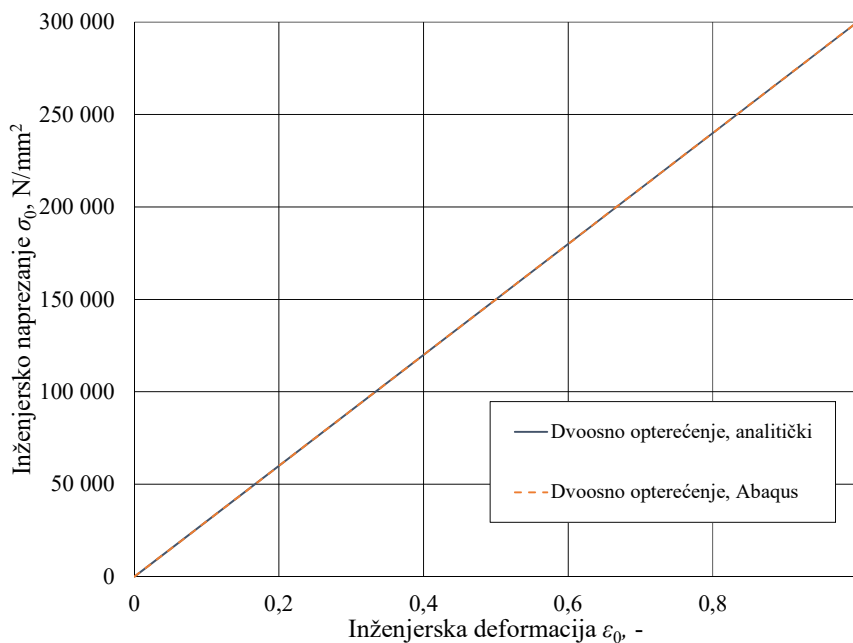
Na model su primijenjeni rubni uvjeti simetrije u smjeru osi  $x$ ,  $y$  i  $z$ , identično kao u poglavlju 5.1.1.2. (Slika 5.2. a), te su zadani prisilni pomaci u smjeru osi  $x$  i  $z$  (Slika 5.6.).



**Slika 5.6. Zadano opterećenje za slučaj dvoosnog opterećenja**

Mreža modela napravljena je od jednog prizmatičnog 3D C3D8R elementa dimenzija  $0,5 \times 0,5 \times 0,5$  mm, identično kao u poglavlju 5.1.1.2. (Slika 5.3.).

Slika 5.7. pokazuje usporedbu analitičkog i numeričkog rješenja za dvoosno opterećen prizmatični uzorak, te se može vidjeti da se rješenja podudaraju.

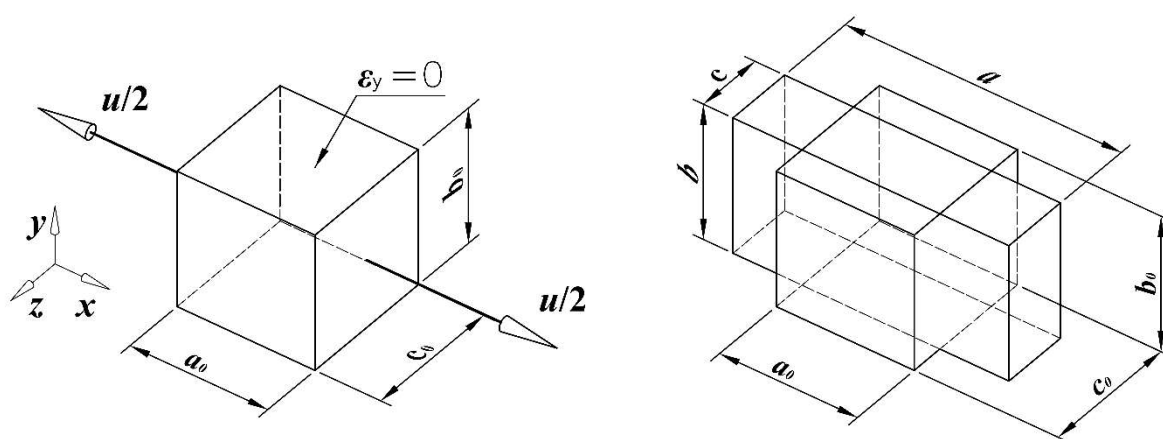


**Slika 5.7. Usporedba analitičkog i numeričkog rješenja za slučaj dvoosnog opterećenja**

### 5.1.3. Ravninsko stanje deformacija

Prizmatični uzorak (Slika 5.8.) podvrgnut je eksperimentu s ravninskim stanjem deformacija ( $b_0 = b$ ). Opterećenje je zadano kao prisilni kvazistatički pomak  $u$  poznatog iznosa.





Slika 5.8. Ravninsko stanje deformacija prizmatičnog uzorka

Tablica 5.3. prikazuje zadane geometrijsko materijalne karakteristike za prizmatičan uzorak za slučaj ravninskog stanja deformacija.

Tablica 5.3. Parametri za slučaj ravninskog stanja deformacija

$a_0, b_0, c_0$ , mm	$u$ , mm	$E_0$ , GPa	$\nu$
1	1	210	0,3

Uzorak ima dimenzije jedinične kocke ( $a_0=b_0=c_0=1$  mm), pomak  $u$  zadan je tako da iznos inženjerske deformacije u smjeru globalne osi  $x$  iznosi  $\varepsilon_0=100$  %. Zadan je modul elastičnosti  $E_0 = 210\,000$  MPa, te Poissonov faktor  $\nu = 0,3$ .

Analitički i numerički su određeni:

- inženjersko naprezanje,  $\sigma_0$
- inženjerske deformacije,  $\varepsilon_0$ .

#### 5.1.3.1. Analitičko rješenje

Za ravninsko stanje deformacija vrijedi da je deformacija u smjeru osi  $y$  jednaka

$$\varepsilon_{0y} = 0. \quad (5.20)$$

Izraz (5.20) uvršten je u jednadžbe za deformacije (izrazi od (5.2) do (5.4)) te se dobije Hookeov zakon za ravninsko stanje deformacija

$$\varepsilon_{0x} = \frac{1}{E_0} \left[ \sigma_{0x} - \nu (\sigma_{0y} + \sigma_{0z}) \right], \quad (5.21)$$

$$\varepsilon_{0z} = \frac{1}{E_0} [\sigma_{0z} - \nu(\sigma_{0y} + \sigma_{0x})], \quad (5.22)$$

$$\sigma_{0y} = \nu(\sigma_{0x} + \sigma_{0z}). \quad (5.23)$$

Jednadžba za deformacije u smjeru osi  $x$  glasi

$$\varepsilon_{0x} = \frac{\Delta a_0}{a_0} = \frac{(a_0 + u) - a_0}{a_0} = 1. \quad (5.24)$$

Izrazi (5.23) i (5.24) uvršteni su u izraz (5.21) te uz podatak da je  $\sigma_{0z} = 0$  dobije se izraz za naprezanje u smjeru osi  $x$

$$\sigma_{0x} = \frac{E_0}{1-\nu^2} = 230\,769,23 \text{ N/mm}^2. \quad (5.25)$$

Zatim se iz izraza (5.23) dobije

$$\sigma_{0y} = 69\,230,76923 \text{ N/mm}^2, \quad (5.26)$$

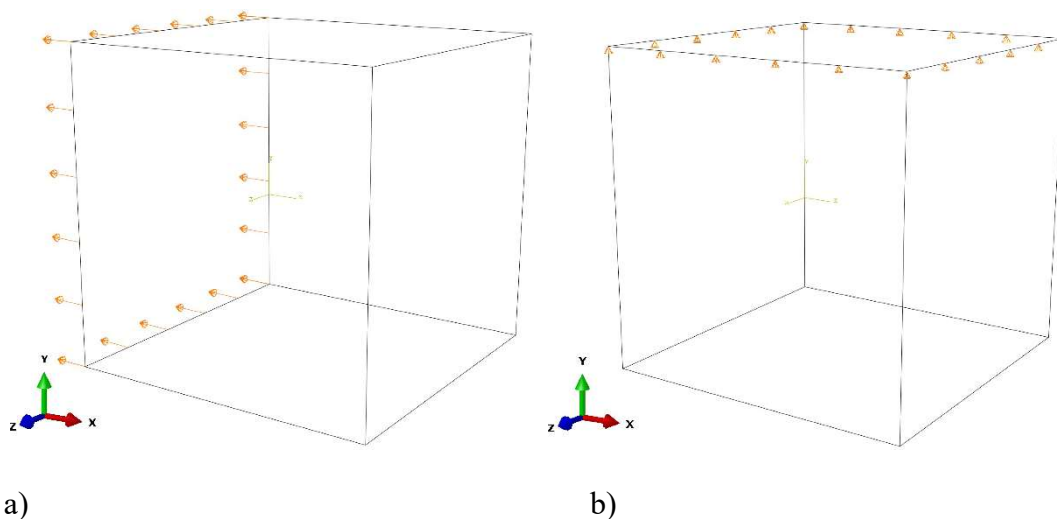
te su izrazi (5.25) i (5.26) uvršteni u izraz (5.22) i dobije se iznos deformacije u smjeru osi  $z$

$$\varepsilon_{0z} = -0,4286. \quad (5.27)$$

#### 5.1.3.2. Numeričko rješenje

Proračunski model je tri puta simetričan prema geometriji te jednom prema opterećenju, stoga je korištena jedna osmina geometrije, te polovina prisilnog pomaka.

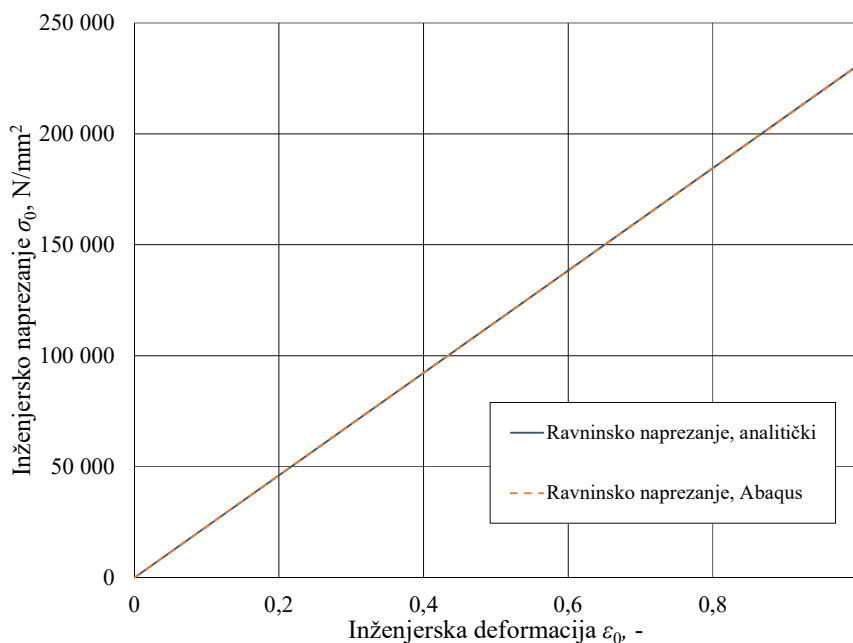
Na model su primijenjeni rubni uvjeti simetrije u smjeru osi  $x$ ,  $y$  i  $z$ ; identično kao u poglavlju 3.1.1.2. (Slika 5.2. a), te su zadani prisilni pomaci u smjeru osi  $x$  (Slika 5.9. a). Također su pomoću rubnih uvjeta onemogućene deformacije u smjeru osi  $y$  (Slika 5.9. b).



**Slika 5.9. 3D model: a) zadano opterećenje, b) onemogućene deformacije**

Mreža modela napravljena je od jednog prizmatičnog 3D C3D8R elementa dimenzija 0,5 x 0,5 x 0,5 mm, identično kao u poglavlju 5.1.1.2. (Slika 5.3.).

Slika 5.10. pokazuje usporedbu analitičkog i numeričkog rješenja za dvoosno opterećen prizmatični uzorak, te se može vidjeti da se rješenja podudaraju.

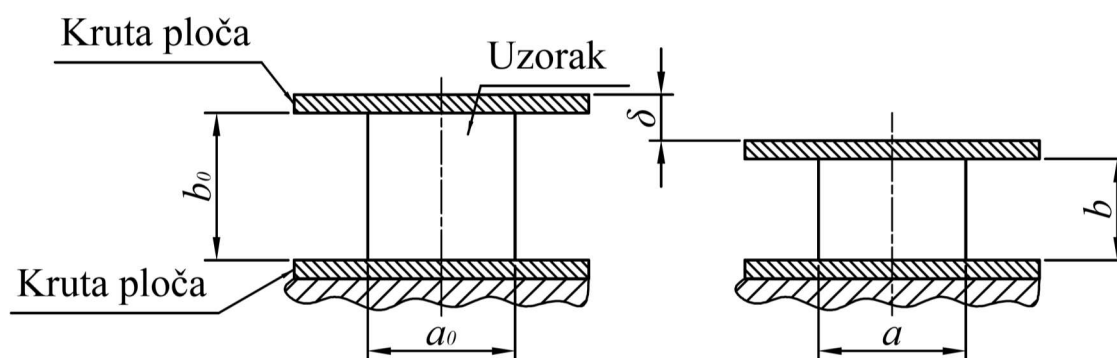


**Slika 5.10. Usporedba analitičkog i numeričkog rješenja za slučaj ravninskog stanja deformacija**

## 5.2. Primjer II: analiza kontakta bez trenja

Prizmatični uzorak postavljen je između dvije krute ploče, te je podvrgnut statičkom tlačnom ispitivanju (Slika 5.11.). Opterećenje je zadano preko prisilnog pomaka  $\delta$  gornje krute ploče poznatog iznosa. Pomoću ovog primjera u analizu je uključena materijalna nelinearnost, te nelinearni rubni uvjeti (problem kontakta). Potom je određena potrebna primijenjena sila  $F$  potrebna da se ostvari zadani pomak. Sila je određena analitički i numerički pomoću teorija:

- malih pomaka i malih deformacija
- velikih pomaka i velikih deformacija koristeći pritom nestlačivi neo-Hooke hiperelastični konstitutivni model za gumu iz uvjeta konzistencije s malim deformacijama



Slika 5.11. Statičko tlačno ispitivanje gumenog uzorka

Tablica 5.4. prikazuje zadane geometrijsko materijalne karakteristike.

Tablica 5.4. Geometrijsko materijalne karakteristike za prizmatični uzorak

$a_0, b_0, c_0$ , mm	$\delta$ , mm	$E_0$ , MPa	$\nu$
1	0,75	3	0,5

Iz zadanih parametara, vidljivo je da je uzorak dimenzija jedinične kocke ( $a_0=b_0=c_0=1$  mm). Zadan je i prisilni pomak gornje krute ploče prema donjoj  $\delta$ , početni modul elastičnosti  $E_0 = 3$  MPa, te Poissonov faktor  $\nu = 0,5$ .

### 5.2.1. Teorija malih pomaka i deformacija

Uz pretpostavku malih pomaka i deformacija problem se analitički rješava linearno. Prilikom numeričkog proračuna materijal se definira kao elastičan, a opcija NLGEOM ostaje isključena.

#### 5.2.1.1. Analitičko rješenje

Nakon pomaka duljina stranice  $b_0$  iznosi:

$$b = b_0 - \delta, \quad (5.28)$$

gdje je  $b$  duljina stranice deformiranog uzorka,  $\delta$  je zadani pomak.

Formula za inženjersku deformaciju  $\varepsilon_0$  glasi

$$\varepsilon_0 = \frac{\Delta b_0}{b_0} = \frac{b - b_0}{b_0}. \quad (5.29)$$

Inženjersko naprezanje  $\sigma_0$  se može izraziti kao

$$\sigma_0 = \frac{F}{A_0} = \varepsilon_0 \cdot E_0, \quad (5.30)$$

gdje je  $F$  primijenjena sila,  $A_0$  je površina na koju sila djeluje prije početka deformacije,  $\varepsilon_0$  je inženjerska deformacija, a  $E_0$  je početni modul elastičnosti.

Početna površina jednaka je

$$A_0 = a_0 \cdot c_0 = a_0^2, \quad (5.31)$$

Zatim su uvršteni izrazi (5.29) i (5.31) u (5.30) te se dobije jednačba za primijenjenu silu koja glasi

$$F = -\delta \cdot E_0 \cdot a_0. \quad (5.32)$$

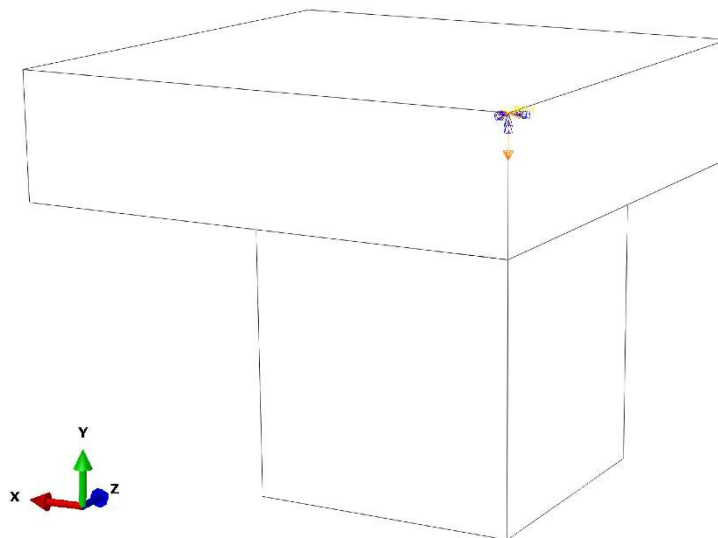
#### 5.2.1.2. Numeričko rješenje

Proračunski model je tri puta simetričan prema geometriji, te jednom prema opterećenju, stoga je korištena jedna osmina geometrije i primijenjena je polovina prisilnog pomaka. Pretpostavljeno je linearno elastično ponašanje materijala. Primijenjena je formulacija malih pomaka i deformacija (u programskom paketu *Abaqus* NLGEOM isključen).

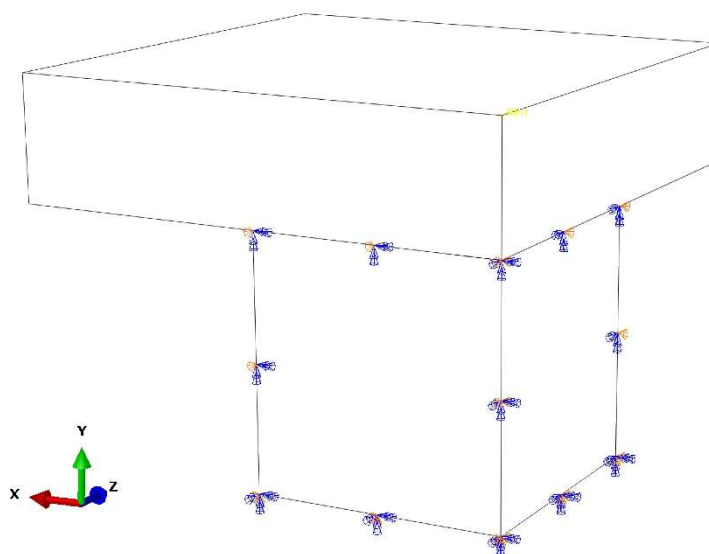
Materijal ploče u stvarnosti je čelik, ali u numeričkom smislu ploča je definirana kao apsolutno kruto tijelo (eng. *rigid body*). Ploči je zadana referentna točka  $RP_1$  te su u referentnu

točku zadani rubni uvjeti i opterećenja. Rubni uvjeti  $RP_1$  vezani su uz ravnine simetrije (u smjeru osi  $x$  i  $z$ ). Ploči je dopušten samo pomak u smjeru osi  $y$  (Slika 5.12.).

Na uzorku su primijenjeni rubni uvjeti simetrije u smjeru osi  $x$ ,  $y$  i  $z$  (Slika 5.13.).



**Slika 5.12.** Krutoj ploči pomak je dopušten samo u smjeru osi  $y$

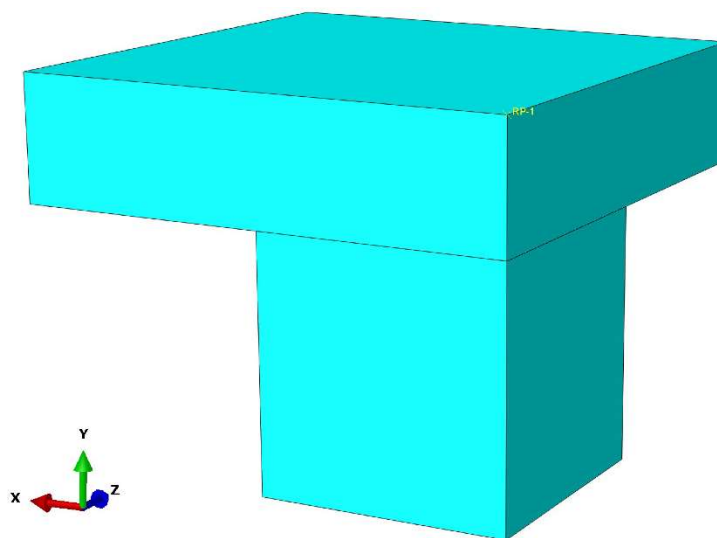


**Slika 5.13.** Primijenjeni rubni uvjeti simetrije

Prilikom definiranja kontakta u programskom paketu *Abaqus* za diskretizaciju kontakta odabrana je opcija *node-to-surface*, uz *finite-sliding* opciju za definiranje klizanja plohe o plohu.

Mreža uzorka napravljena je od jednog prizmatičnog 3D elementa C3D20RH (Slika 5.14.). U slučaju pretpostavke nestlačivosti kontinuuma, tj. iznosa Poissonovog faktora  $\nu$  blizu 0,5 u programskom paketu *Abaqus* se preporuča korištenje elemenata s hibridnom formulacijom.

Korištenje hibridnih elemenata osigurava bržu i izgledniju konvergenciju prilikom rješavanja iterativno – inkrementalnih problema [17], [18] i [19].



**Slika 5.14. Mreža modela napravljena od jednog prizmatičnog elementa**

Tablica 5.5. prikazuje usporedbu maksimalnih potrebnih sila  $F_{\max}$ , da bi se ostvario željeni pomak  $\delta$ , izračunatih analitički i pomoću programskog paketa *Abaqus*. Rezultat dobiven u programskom paketu *Abaqus* poklapaju se s rezultatima dobivenim analitički.

**Tablica 5.5. Usporedba primijenjenih sila  $F$  za slučaj malih pomaka i deformacija**

Primijenjena sila	$F_{\max}$ , N	$E_{\text{rel}}$ , %
Analitičko rješenje	2,25	0
<i>Abaqus</i>	2,25	0

### 5.2.2. Teorija velikih pomaka i velikih deformacija koristeći pritom neo–Hooke materijalni model

U ovom slučaju se koristi hiperelastični materijal te je nužno uključiti opciju *NLGEOM* prilikom numeričkog računanja. Materijalni model koji se koristi u ovom slučaju je neo-Hooke, te se u proračunu koriste relacije vezane uz tu metodu.

#### 5.2.2.1. Analitičko rješenje

Stvarno naprezanje  $\sigma$  se može izraziti kao

$$\sigma = \frac{F}{A}, \quad (5.33)$$

gdje je  $\sigma$  stvarno naprezanje,  $F$  primijenjena sila,  $A$  je površina nakon deformiranja.

Izraz za naprezanje za neo – Hooke konstitutivni model glasi [8]

$$\sigma_{(N-H)} = 2 \cdot C_{10} \cdot \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right), \quad (5.34)$$

gdje je  $C_{10}$  hiperelastična materijalna konstanta,  $\lambda$  je omjer istezanja.

Hiperelastična materijalna konstanta  $C_{10}$  glasi

$$C_{10} = \frac{\mu_{Lam}}{2} = \frac{E_0}{2(1+\nu)}, \quad (5.35)$$

gdje je  $\mu_{Lam}$  konstanta koja se naziva druga *Lameova* konstanta,  $E_0$  je početni modul elastičnosti,  $\nu$  je Poissonov faktor.

Omjer istezanja  $\lambda$  je

$$\lambda = 1 + \varepsilon_0 = \left( 1 + \frac{(a_0 - \delta) - a_0}{a_0} \right) = \frac{a_0 - \delta}{a_0}. \quad (5.36)$$

Izraz za površinu nakon deformacije glasi

$$A = c^2. \quad (5.37)$$

Iz volumne jednakosti (iz podatka da je  $\nu = 0,5$ )

$$V_0 = V, \quad (5.38)$$

slijedi da je

$$c = \sqrt{\frac{a_0^3}{a_0 - \delta}}. \quad (5.39)$$

Zatim su izrazi (5.34), (5.35), (5.36) i (5.39) uvršteni u izraz (5.33) te se nakon sređivanja dobije konačni izraz za primijenjenu silu

$$F = \frac{E_0}{2(1+\nu)} \cdot \left[ \frac{(a_0 - \delta)^2}{a_0^2} - \frac{a_0}{(a_0 - \delta)} \right] \cdot \frac{a_0^3}{(a_0 - \delta)}. \quad (5.40)$$

#### 5.2.2.2. Numeričko rješenje

Proračunski model je tri puta simetričan prema geometriji, te jednom prema opterećenju, stoga je korištena jedna osmina geometrije, te polovina prisilnog pomaka. Primijenjena je formulacija velikih pomaka i deformacija (u programskom paketu *Abaqus* potrebno je uključiti



opciju NLGEOM ). Prilikom korištenja neo-Hooke modela potrebno je u programskom paketu *Abaqus* unijeti podatke za materijalni koeficijent  $C_{10}$  koji definira smično ponašanje materijala, te  $D_i$  koji uključuje (ne)stlačivost.

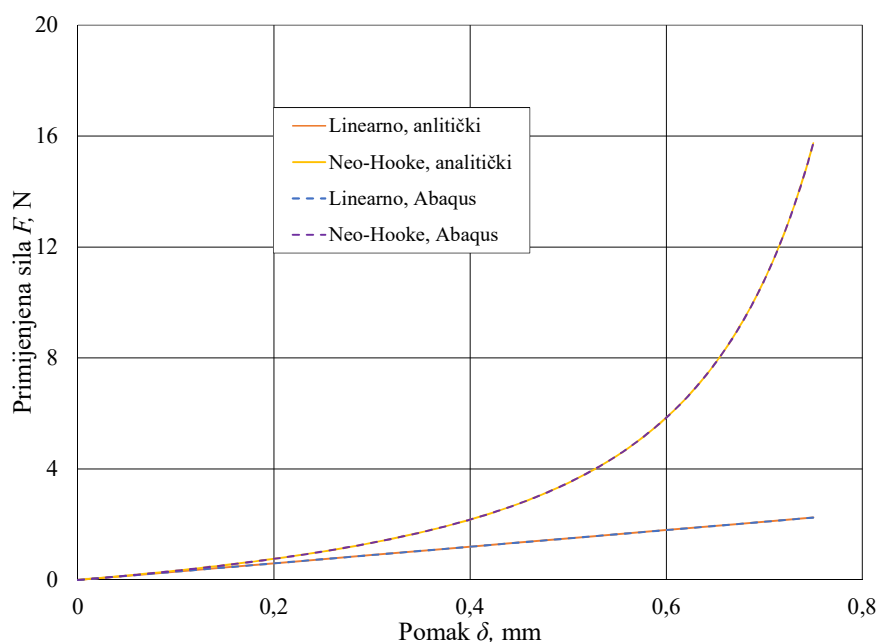
Numerički model identičan je modelu prikazanom u poglavlju 5.2.1.2. (Slika 5.12., Slika 5.13., Slika 5.14.).

Tablica 5.6. prikazuje usporedbu maksimalnih potrebnih sila  $F_{\max}$ , da bi se ostvario željeni pomak  $\delta$ , izračunatih analitički i pomoću programskog paketa *Abaqus*. Rezultat dobiven u programskom paketu *Abaqus* poklapaju se s analitički dobivenim rezultatima.

**Tablica 5.6. Usporedba primijenjenih maksimalnih sila  $F$  za slučaj velikih pomaka i deformacija (neo-Hooke)**

Primijenjena sila	$F_{\max}$ , N	$E_{\text{rel}}$ , %
Analitičko rješenje	15,75	0
<i>Abaqus</i>	15,75	0

Slika 5.15. prikazuje usporedbu analitičkih i numeričkih rezultata odnosa sile  $F$  potrebne za ostvarivanje zadanog pomaka  $\delta$ . Vidljivo je da se rezultati dobiveni analitički podudaraju s rezultatima dobivenim pomoću programskog paketa *Abaqus*.



**Slika 5.15. Usporedba odnosa primijenjene sile  $F$  i pomaka  $\delta$  (linearno i neo-Hooke)**

### 5.2.3. Dodatak – Ogden materijalni model

Prizmatični uzorak iz primjera II (poglavlje 5.2, Slika 5.11) analitički i numerički je proračunat korištenjem Ogden materijalnog modela.

Tablica 5.7. prikazuje zadane geometrijsko materijalne karakteristike.

**Tablica 5.7. Geometrijsko materijalne karakteristike za prizmatični uzorak (Ogden)**

$a_0, b_0, c_0$ , mm	$\delta$ , mm	$E_0$ , MPa	$\nu$	$\alpha_1$
1	0,75	3	0,5	3

Iz zadanih parametara, vidljivo je da je uzorak dimenzija jedinične kocke ( $a_0=b_0=c_0=1$  mm). Zadan je i prisilni pomak gornje krute ploče prema donjoj  $\delta$ , početni modul elastičnosti  $E_0 = 3$  MPa, Poissonov faktor  $\nu = 0,5$ , a materijalni parametar za Ogden model  $\alpha_1 = 3$ .

#### 5.2.3.1. Analitičko rješenje

Izraz za jednoosno naprezanje Ogden materijalnog modela glasi [17], [18] i [19]

$$\sigma_{0(\text{Og})} = 2 \cdot \frac{\mu_1}{\alpha_1} \cdot \left( \lambda^{\alpha_1-1} - \lambda^{-\frac{1}{2}\alpha_1-1} \right). \quad (5.41)$$

Inženjersko naprezanje izraženo je kao

$$\sigma_0 = \frac{F}{A_0}. \quad (5.42)$$

Izraz za istežanje  $\lambda$  glasi

$$\lambda = 1 + \varepsilon_0 = \left( 1 + \frac{(a_0 - \delta) - a_0}{a_0} \right) = \frac{a_0 - \delta}{a_0}. \quad (5.43)$$

Materijalne konstante Ogden modela  $\alpha_1$  i  $\mu_1$  povezane su s početnim modulom elastičnosti  $E_0$  preko hiperelastične materijalne konstante  $C_{10}$

$$C_{10} = \frac{\mu_{\text{Lam}}}{2} = \frac{E_0}{2(1+\nu)}, \quad (5.44)$$

$$\mu_{\text{Lam}} = 2 \cdot C_{10} = \frac{\mu_1 \cdot \alpha_1}{2} = \frac{E_0}{2(1+\nu)}. \quad (5.45)$$

Izraz za početnu površinu  $A_0$  glasi

$$A_0 = a_0^2. \quad (5.46)$$

Kada se izrazi (5.41), (5.43), (5.45) i (5.46) uvrste u izraz (5.42) te se srede, dobije se konačni izraz za silu

$$F = \frac{2 \cdot E_0}{\alpha_1^2} \cdot \left[ \left( \frac{a_0 - \delta}{a_0} \right)^{\alpha_1 - 1} - \left( \frac{a_0 - \delta}{a_0} \right)^{\frac{1}{2}\alpha_1 - 1} \right] \cdot a_0^2. \quad (5.47)$$

#### 5.2.3.2. Numeričko rješenje

Proračunski model identičan je modelu korištenom u slučaju neo-Hooke materijalnog modela u poglavlju 5.2.1.2. Rubni uvjeti, opterećenje i mreža konačnih elemenata postavljeni su identično kao u poglavlju 5.2.1.2 (Slika 5.12., Slika 5.13. i Slika 5.14.)

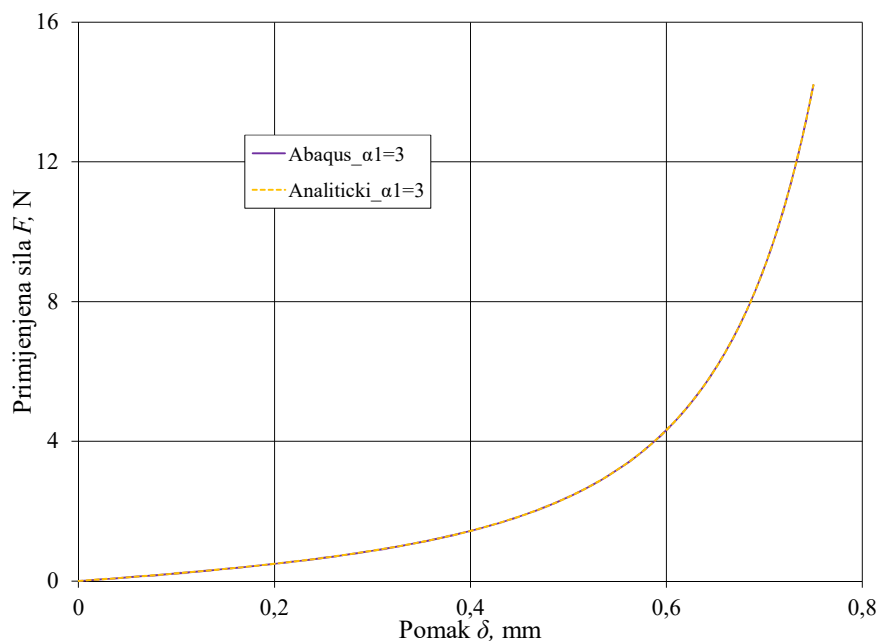
Prilikom korištenja Ogden modela potrebno je u programskom paketu *Abaqus* unijeti podatke za materijalni parametre  $\alpha_1$  i  $\mu_1$ , te parametar  $D_i$  koji uključuje (ne)stlačivost.

Tablica 5.8. prikazuje usporedbu maksimalnih potrebnih sila  $F_{\max}$ , da bi se ostvario željeni pomak  $\delta$ , izračunatih analitički i pomoću programskog paketa *Abaqus*. Rezultat dobiven u programskom paketu *Abaqus* poklapaju se s analitički dobivenim rezultatima.

**Tablica 5.8. Usporedba primijenjenih maksimalnih sila  $F$  za slučaj velikih pomaka i deformacija (Ogden)**

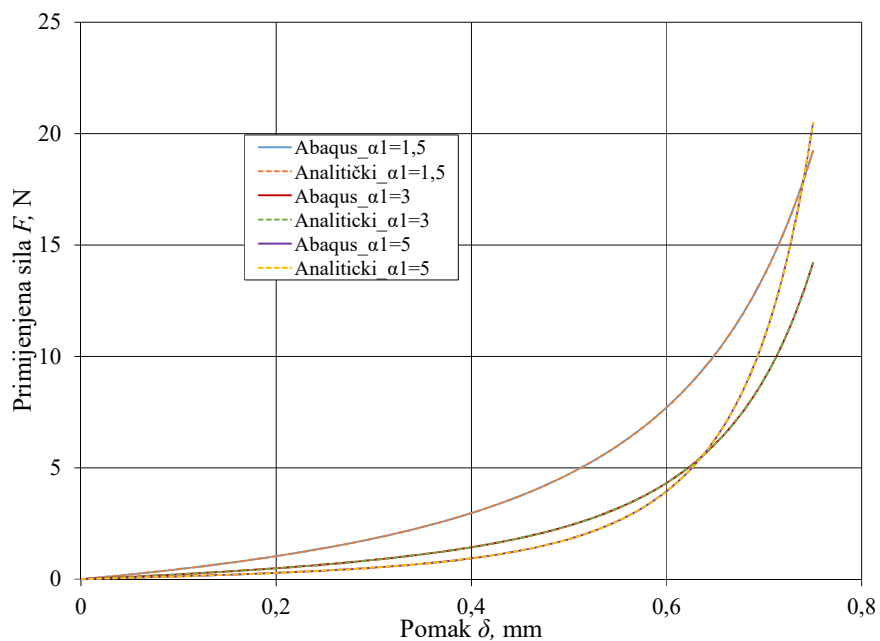
Primijenjena sila	$F_{\max}$ , N	$E_{\text{rel}}$ , %
Analitičko rješenje	14,202	0
<i>Abaqus</i>	14,202	0

Slika 5.16. prikazuje usporedbu analitičkih i numeričkih rezultata odnosa sile  $F$  potrebne za ostvarivanje zadanog pomaka  $\delta$ . Vidljivo je da se rezultati dobiveni analitički podudaraju s rezultatima dobivenim pomoću programskog paketa *Abaqus*.



**Slika 5.16. Usporedba odnosa primijenjene sile  $F$  i pomaka  $\delta$  (Ogden)**

Slika 5.17. prikazuje utjecaj materijalnih konstanti Ogden modela na izgled krivulje sila-pomak. Korišteni su podaci zadani u poglavlju 5.2.3 (Tablica 5.7) osim što se mijenjala materijalna konstanta  $\alpha_1$ . Usporedba je napravljena za tri slučaja ( $\alpha_1 = 1,5$ ,  $\alpha_1 = 3$ ,  $\alpha_1 = 5$ ).



**Slika 5.17. Utjecaj materijalnih parametara Ogden modela**

Iz dijagrama se može vidjeti da je povećavanjem materijalnog parametra za Ogden model  $\alpha_1$  potrebna sila za postizanje zadanog pomaka manja (pad nagiba krivulje) te to vrijedi dok  $\alpha_1$  ne

postane veći od  $\alpha_1 = 3$ . Za  $\alpha_1 > 3$  nagib krivulje sila-pomak se smanjuje za pomake  $\delta < 6$  mm, ali nakon te vrijednosti ubrzano raste.

#### 5.2.4. Dodatak – Arruda-Boyce materijalni model

Prizmatični uzorak iz primjera II (poglavlje 5.2, Slika 5.11) analitički i numerički je proračunat korištenjem Ogden materijalnog modela.

Tablica 5.9. prikazuje zadane geometrijsko materijalne karakteristike.

**Tablica 5.9. Geometrijsko materijalne karakteristike za prizmatični uzorak (Arruda-Boyce)**

$a_0, b_0, c_0$ , mm	$\delta$ , mm	$E_0$ , MPa	$\nu$	$\lambda_m$
1	0,75	3	0,5	3

Iz zadanih parametara, vidljivo je da je uzorak dimenzija jedinične kocke ( $a_0=b_0=c_0=1$  mm). Zadan je i prisilni pomak gornje krute ploče prema donjoj  $\delta$ , početni modul elastičnosti  $E_0 = 3$  MPa, Poissonov faktor  $\nu = 0,5$  i materijalni parametar za Arruda-Boyce model  $\lambda_m = 3$ .

##### 5.2.4.1. Analitičko rješenje

Izraz za jednoosno naprezanje Arruda-Boyce materijalnog modela glasi [17], [18] i [19]

$$\sigma_{0(A-B)} = 2 \cdot \mu \left( \lambda - \lambda^{-2} \right) \sum_{i=1}^5 \frac{i \cdot C_i}{\lambda_m^{2i-2}} \cdot \overline{I_1^{i-1}}. \quad (5.48)$$

Inženjersko naprezanje izraženo je kao

$$\sigma_0 = \frac{F}{A_0}. \quad (5.49)$$

Izraz za istežanje  $\lambda$  glasi

$$\lambda = 1 + \varepsilon_0 = \left( 1 + \frac{(a_0 - \delta) - a_0}{a_0} \right) = \frac{a_0 - \delta}{a_0}. \quad (5.50)$$

Materijalne konstante Arruda-Boyce modela  $\lambda_m$  i  $\mu$  povezane su s početnim modulom elastičnosti  $E_0$  preko hiperelastične materijalne konstante  $C_{10}$

$$C_{10} = \frac{\mu_{Lam}}{2} = \frac{E_0}{2(1+\nu)}, \quad (5.51)$$

$$\mu_{\text{Lam}} = 2 \cdot C_{10} = \mu \left( 1 + \frac{3}{5\lambda_m^2} + \frac{99}{175\lambda_m^4} + \frac{513}{875\lambda_m^6} + \frac{42039}{67375\lambda_m^8} \right) = \frac{E_0}{2(1+\nu)}. \quad (5.52)$$

Izraz za početnu površinu  $A_0$  glasi

$$A_0 = a_0^2. \quad (5.53)$$

Kada se izrazi (5.48), (5.50), (5.52) i (5.53) uvrste u izraz (5.49) te se srede, dobije se konačni izraz za silu

$$F = \frac{E_0}{(1+\nu) \cdot \left( 1 + \frac{3}{5\lambda_m^2} + \frac{99}{175\lambda_m^4} + \frac{513}{875\lambda_m^6} + \frac{42039}{67375\lambda_m^8} \right)} \cdot \left( \frac{a_0 - \delta}{a_0} - \left( \frac{a_0 - \delta}{a_0} \right)^{-2} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{10 \cdot \lambda_m^2} \cdot I_1^1 + \frac{11}{350 \cdot \lambda_m^4} \cdot I_1^2 + \frac{19}{1750 \cdot \lambda_m^6} \cdot I_1^3 + \frac{519}{134750 \cdot \lambda_m^8} \cdot I_1^4 \right) \cdot a_0^2. \quad (5.54)$$

#### 5.2.4.2. Numeričko rješenje

Proračunski model identičan je modelu korištenom u slučaju neo-Hooke materijalnog modela u poglavlju 5.2.1.2. Rubni uvjet, opterećenje i mreža konačnih elemenata postavljeni su identično kao u poglavlju 5.2.1.2 (Slika 5.12., Slika 5.13. i Slika 5.14.)

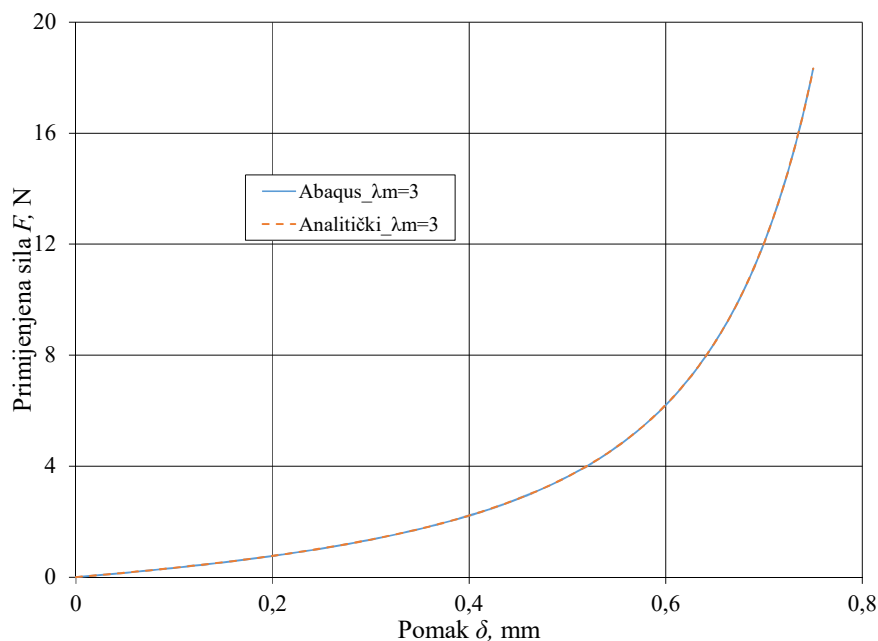
Prilikom korištenja Arruda-Boyce modela potrebno je u programskom paketu *Abaqus* unijeti podatke za materijalni parametre  $\lambda_m$  i  $\mu$ , te parametar  $D_i$  koji uključuje (ne)stlačivost.

Tablica 5.10. prikazuje usporedbu maksimalnih potrebnih sila  $F_{\text{max}}$ , da bi se ostvario željeni pomak  $\delta$ , izračunatih analitički i pomoću programskog paketa *Abaqus*. Rezultat dobiven u programskom paketu *Abaqus* poklapaju se s analitički dobivenim rezultatima.

**Tablica 5.10. Usporedba primijenjenih maksimalnih sila  $F$  za slučaj velikih pomaka i deformacija (Arruda-Boyce)**

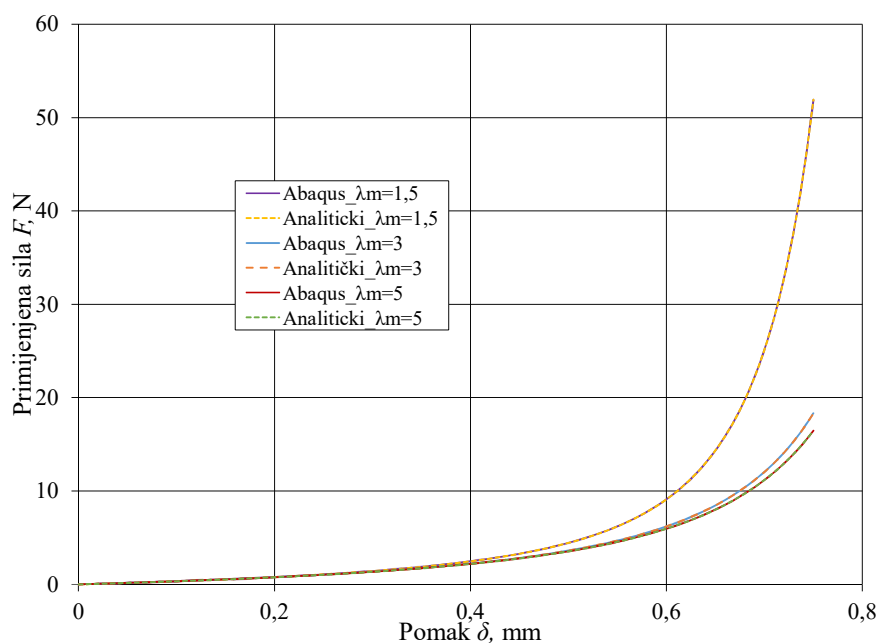
Primijenjena sila	$F_{\text{max}}, \text{N}$	$E_{\text{rel}}, \%$
Analitičko rješenje	18,324	0
<i>Abaqus</i>	18,324	0

Slika 5.18. prikazuje usporedbu analitičkih i numeričkih rezultata odnosa sile  $F$  potrebne za ostvarivanje zadanog pomaka  $\delta$ . Vidljivo je da se rezultati dobiveni analitički podudaraju s rezultatima dobivenim pomoću programskog paketa *Abaqus*.



**Slika 5.18. Usporedba odnosa primijenjene sile  $F$  i pomaka  $\delta$  (Arruda-Boyce)**

Slika 5.19 prikazuje utjecaj materijalnih konstanti Arruda-Boyce modela na izgled krivulje sila-pomak. Korišteni su podaci zadani u poglavlju 5.2.4 (Tablica 5.9) osim što se mijenjala materijalna konstanta  $\lambda_m$ . Usporedba je napravljena za tri slučaja ( $\lambda_m = 1,5$ ,  $\lambda_m = 3$ ,  $\lambda_m = 5$ ).



**Slika 5.19. Utjecaj materijalnih parametara Arruda-Boyce modela**

Iz dijagrama je vidljivo da smanjenjem materijalne konstante  $\lambda_m$  raste potrebna sila  $F$  za postizanje zadanog pomaka  $\delta$ . Također se može uočiti da porastom  $\lambda_m$  smanjuje se utjecaj na krivulju. Materijalna konstanta  $\lambda_m$  nema utjecaja na krivulju za male pomake (do  $\approx 0,2$  mm).

## 6. EKSPERIMENT

Eksperimentalna ispitivanja provedena su u Laboratoriju za eksperimentalnu mehaniku Fakulteta strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu. Ispitivanja su provedena na dva ispitna uzorka gumenog elementa rastojnika-prigušivača. Uzorci su ispitivani na tlak i vlak pri različitim brzinama deformacije. Uzorci su ispitani i sa različitim faktorom trenja, te sa predkondicioniranjem<sup>3</sup> i bez predkondicioniranja. Kako bi se mogao uočiti utjecaj trenja na rezultate, uzorci su prvotno ispitani u normalnom stanju, a zatim premazani mazivim sredstvom<sup>4</sup> kako bi se smanjio faktor trenja.

### 6.1. Kidalica *Messphysik Beta 50-5*

Ispitivanja su provedena na kidalici *Messphysik Beta 50-5* s upravljačkom jedinicom *EDC 25* (Slika 6.1.). Upravljačka jedinica povezuje kidalicu s računalom, pomoću kojeg se preko korisničkog sučelja u pripadajućem programu upravlja radom kidalice. Najveća radna sila koju kidalica može ostvariti pri statičkom opterećivanju iznosi 50 kN. Prije ispitivanja u upravljački program unose se parametri ispitivanja. U ovom slučaju unesena je brzina pomicanja te pomak čeljusti kidalice, te je u svakom trenutku za odgovarajući pomak gornje čeljusti kidalice mjerena pripadna sila.



Slika 6.1. Kidalica *Messphysik Beta 50-5*

---

<sup>3</sup> Predkondicioniranje je postupak opterećivanja i rasterećivanja gume prije ispitivanja u cilju izbjegavanja utjecaja mikrostrukturalnih nesavršenosti na rezultate ispitivanja.

<sup>4</sup> Za mazivo sredstvo korišten je deterdžent za suđe Čarli.



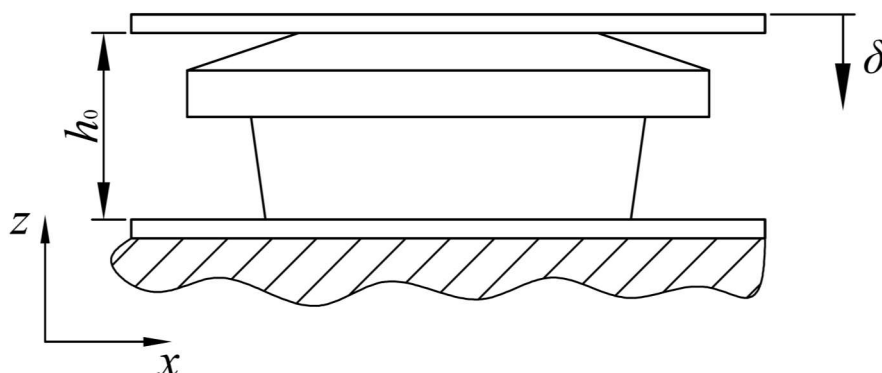
## 6.2. Tlačna ispitivanja

Provedena su tlačna ispitivanja na dva uzorka (E1 i E2) pri brzinama 5, 50 i 500 mm/min (Slika 6.2.). Uzorak je postavljen između dvije krute ploče. Donja ploča miruje, a gornja ploča tlači uzorak zadanim pomakom (Slika 6.3.).



Slika 6.2. Eksperimentalne postavke za tlačno ispitivanje

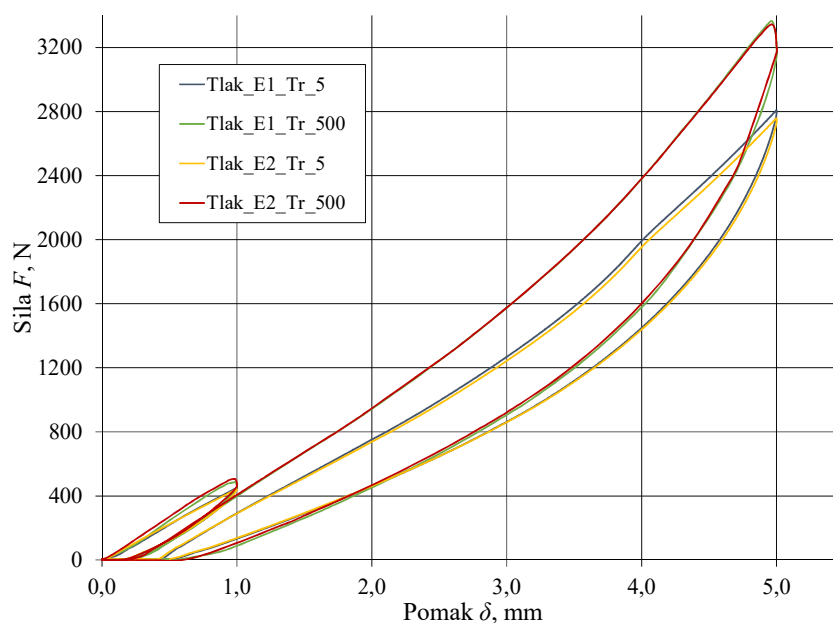
U daljnjim ispitivanjima uzorci su podmazani mazivim sredstvom u svrhu promatranja utjecaja trenja na konačne rezultate. Uzorci su tlačeni u ciklusima sa zadanim pomakom (tlačeni su na 1, 2, 3, 4 i 5 mm). Potom su ponovno provedena sva navedena testiranja, ali ovoga puta sa predkondicioniranjem. Predkondicioniranje je izvršeno pri brzini od 50 mm/min s pomakom od 5 mm.



Slika 6.3. Prikaz eksperimentalnog tlačnog ispitivanja

U ovom poglavlju su, radi preglednosti, u dijagramima prikazani rezultati za dvije brzine, 5 i 500 mm/min, i to za cikluse tlačnog deformiranja za pomake od 1 i 5 mm. Cijeli dijagrami se mogu vidjeti u Dodatku, poglavlje 9.

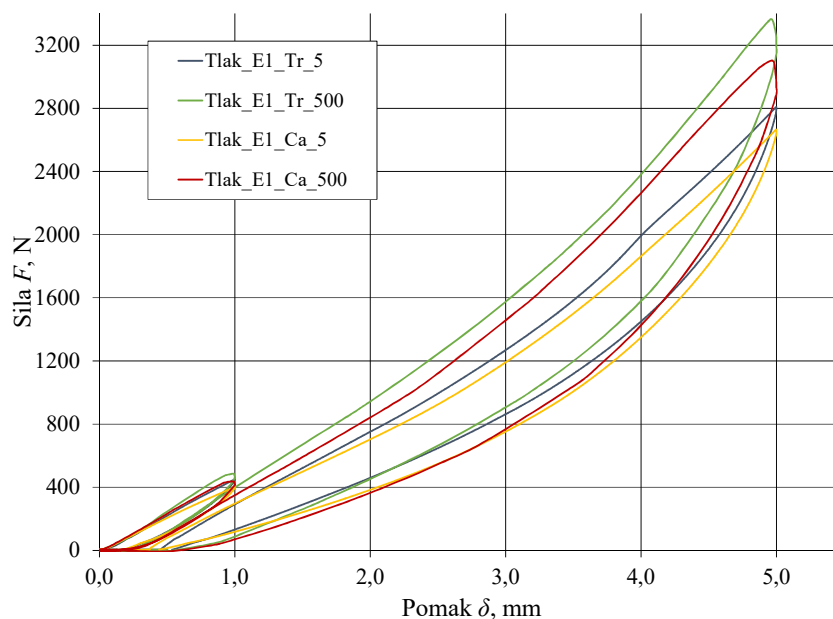
Slika 6.4. pokazuje usporedbu rezultata uzoraka E1 i E2 pri brzinama ispitivanja 5, i 500 mm/min, za slučaj s trenjem, bez predkondicioniranja.



**Slika 6.4. Usporedba rezultata ispitivanja za uzorak E1 i E2**

Na dijagramu se lako može uočiti da je razlika između dobivenih rezultata zanemariva, te su u daljnjem radu prikazani rezultati za samo jedan uzorak (E1). Vidljivo je da su dobiveni rezultati u obliku histereze. Velika površina histereze pokazuje da materijal ima veliko prigušenje.

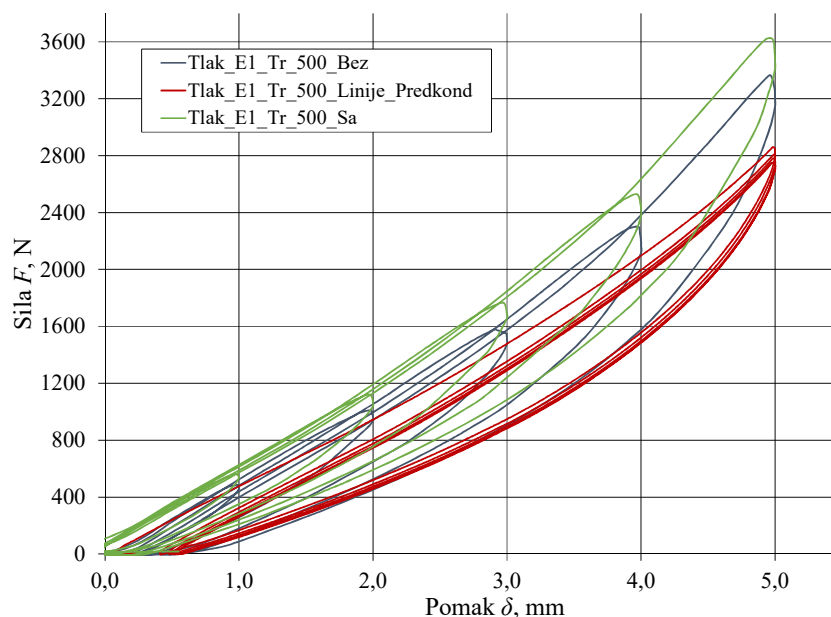
Slika 6.5. prikazuje usporedbu rezultata mjerenja za uzorak E1 za brzine od 5 i 500 mm/min, za slučajeve sa i bez mazivog sredstva, bez predkondicioniranja.



**Slika 6.5. Usporedba rezultata sa i bez mazivog sredstva**

Dijagram pokazuje usporedbu tlačnog ispitivanja na uzorku E1 pri brzinama od 5 i 500 mm/min, za slučajeve sa i bez mazivog sredstva. Vidljivo je da je za postizanje istog pomaka pri jednakoj brzini tlačne deformacije potrebna veća sila kada uzorak nije premazan mazivim sredstvom (veće trenje), što su očekivani rezultati. Također je vidljivo da s porastom brzine tlačne deformacije raste utjecaj trenja na rezultate.

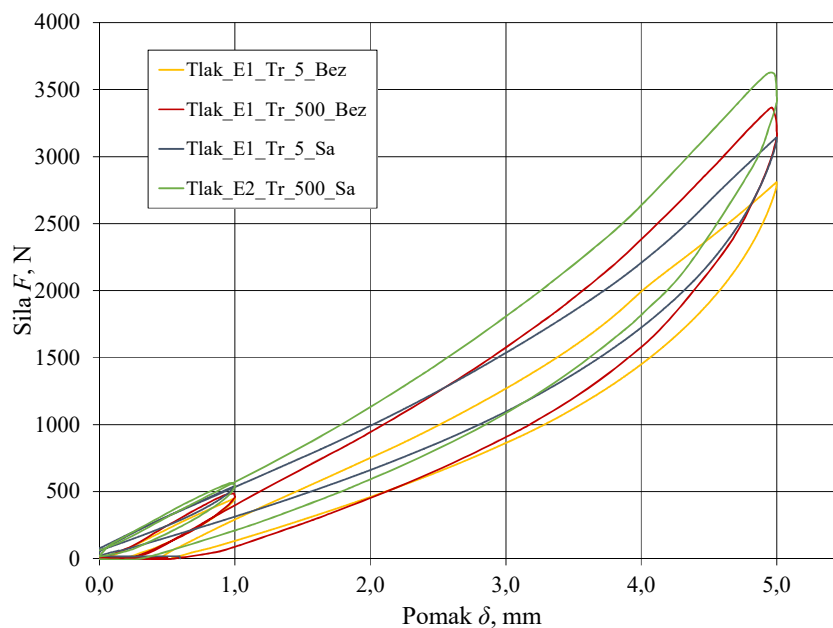
Slika 6.6. prikazuje rezultate ispitivanja na tlak pri brzini od 500 mm/min za slučaj bez mazivog sredstva, sa predkondicioniranjem i bez predkondicioniranja. Na slici se vide linije predkondicioniranja koje su u kasnijim dijagramima uklonjene radi bolje preglednosti.



**Slika 6.6. Rezultati sa i bez predkondicioniranja za brzinu od 500 mm/min i s trenjem**

Na dijagramu je vidljivo da se predkondicioniranjem povećava krutost materijala, odnosno raste potrebna sila za postizanje zadanog pomaka. Bitno je pri tome naglasiti da se predkondicioniranje vrši na najvećem pomaku (u ovom slučaju 5 mm), jer za svaki ciklus s pomakom većim od pomaka na kojem je vršeno predkondicioniranje materijal doživljava novi šok te dolazi do pada linije opterećenja.

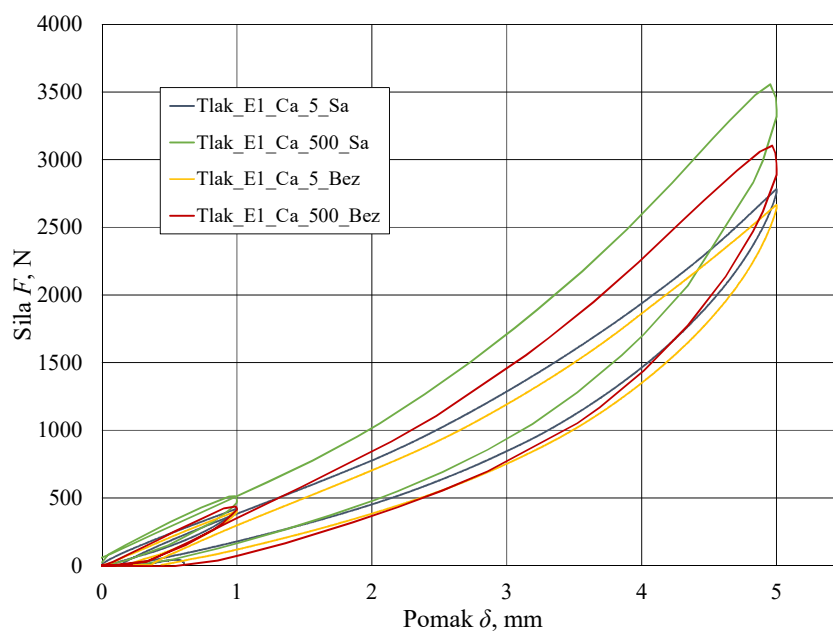
Slika 6.7. prikazuje usporedbu rezultata dobivenih tlačenjem uzorka pri brzini od 5 i 500 mm/min za slučaj sa i bez predkondicioniranja (rađeno na 50 mm/min s pomakom od 5 mm), te bez mazivog sredstva.



**Slika 6.7. Rezultati sa i bez predkondicioniranja s trenjem**

Iz dijagrama je vidljivo da za slučaju s predkondicioniranjem krutost uzorka raste (potrebna je veća sila  $F$  za isti pomak  $\delta$ ).

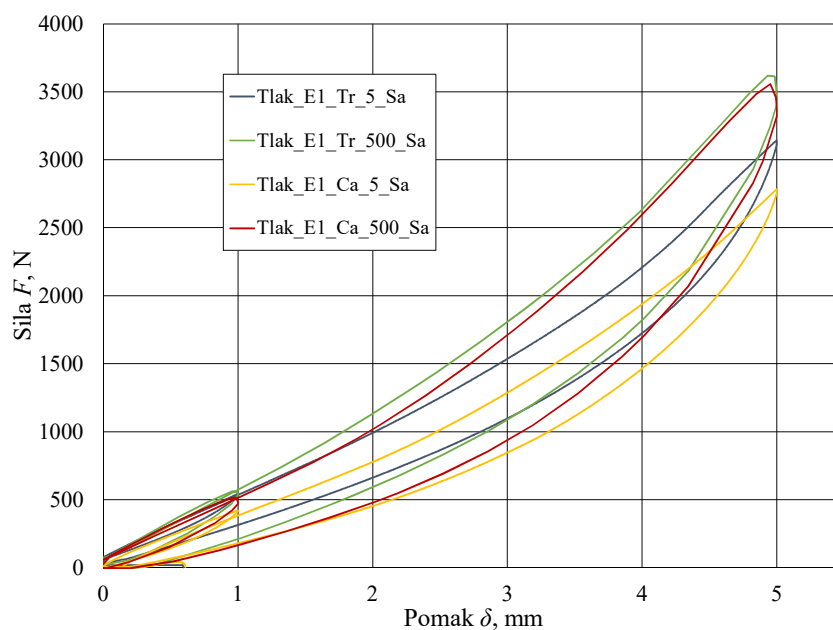
Slika 6.8 prikazuje rezultate za brzine 5 i 500 mm/min, sa i bez predkondicioniranja te sa mazivim sredstvom.



**Slika 6.8. Rezultati sa i bez predkondicioniranja s mazivim sredstvom**

Kao i za slučaj bez mazivog sredstva, ovdje se također vidi veća krutost uzorka za slučaj s predkondicioniranjem.

Slika 6.9. prikazuje utjecaj trenja na odnos sila-pomak za brzine 5 i 500 mm/min za slučaj s predkondicioniranjem.



**Slika 6.9. Utjecaj trenja za slučaj s predkondicioniranjem**

S povećanjem trenja raste i sila  $F$  potrebna za postizanje istog pomaka  $\delta$ . Može se uočiti i da se utjecaj trenja smanjuje s porastom brzine deformacije pri tlačenju.

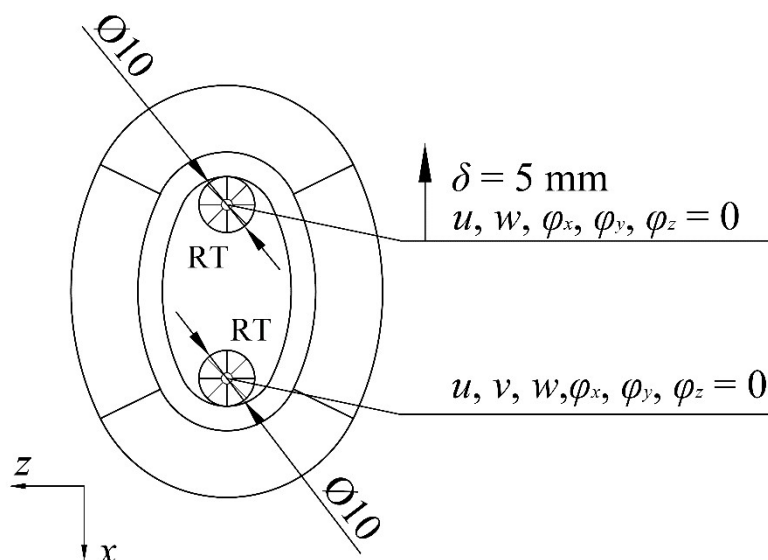
### 6.3. Vlačna ispitivanja

Vlačna ispitivanja (Slika 6.10.) provedena su na dva uzorka (E1 i E2) pri brzinama 5, 50 i 500 mm/min. Uzorak je postavljen na dva cilindra promjera  $D = 10$  mm. Prilikom ispitivanja, jedan cilindar miruje dok drugi razvlači uzorak zadanim pomakom (Slika 6.11.).



**Slika 6.10. Eksperimentalne postavke za vlačno ispitivanje**

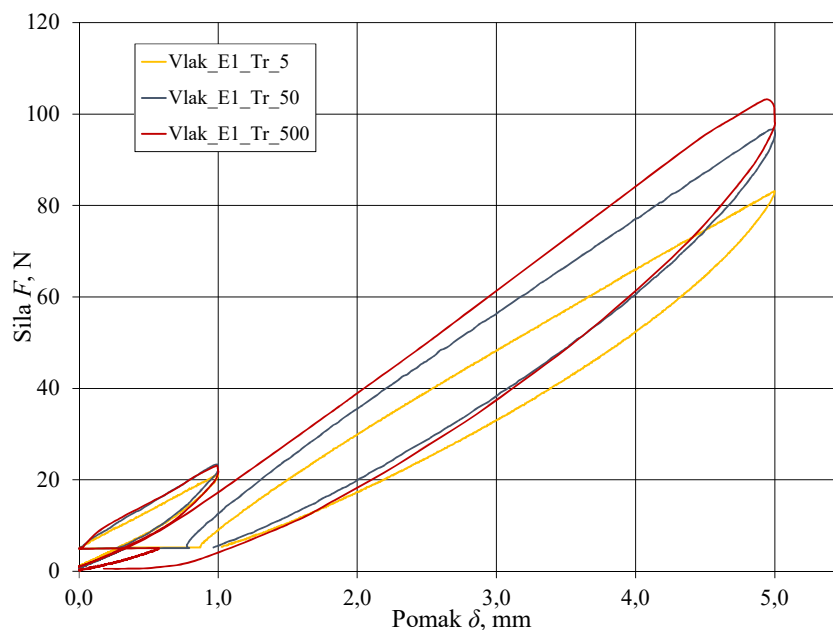
Potom su uzorci podmazani mazivim sredstvom u svrhu promatranja utjecaja trenja na konačne rezultate. Uzorci su ispitivani u ciklusima sa zadanim pomakom (1, 2, 3, 4 i 5 mm). Potom su ponovno provedena sva navedena testiranja, ali ovoga puta sa predkondicioniranjem. Predkondicioniranje je vršeno pri brzini od 50 mm/min, s pomakom od 5 mm.



**Slika 6.11. Prikaz eksperimentalnog vlačnog ispitivanja**

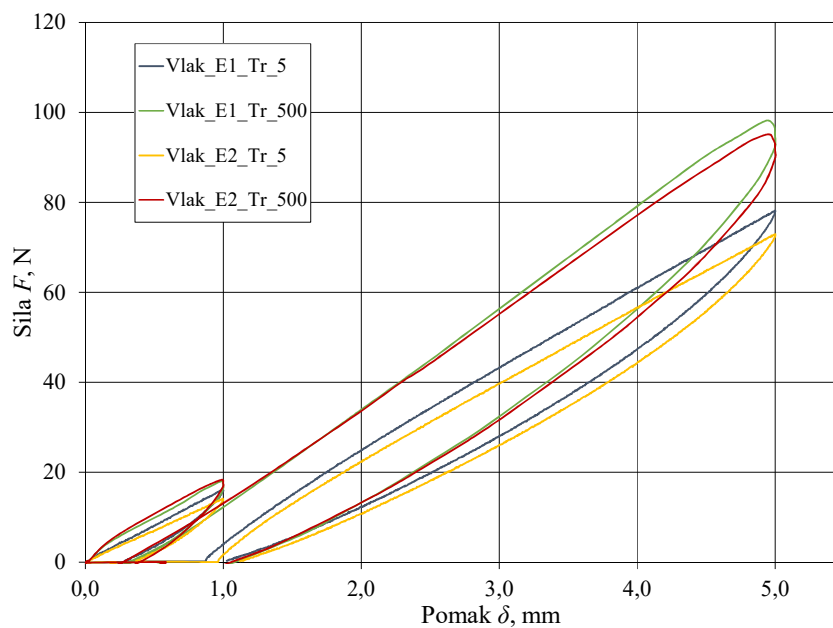
U ovom poglavlju su, radi preglednosti, u dijagramima prikazani rezultati za dvije brzine, 5 i 500 mm/min, i to za cikluse vlačnog deformiranja za pomake od 1 i 5 mm. Cijeli dijagrami se mogu vidjeti u Dodatku, poglavlje 9.

Slika 6.12. prikazuje rezultate vlačnog ispitivanja za uzorak E1. Uzorak se rasterećivao do  $F = 0$  N, ali se pojavljivao efekt udara prilikom svakog novog ciklusa opterećenja. Zato je eksperiment ponovljen, a uzorak se rasterećivao do 5 N kako bi ostao u konstantnom kontaktu s cilindrom. Na taj način je izbjegnuta udar prilikom ponovnog opterećivanja uzorka. Stoga su u daljnjem dijelu rada linije vlačnog ispitivanja pri brzini od 5, 50 i 500 mm/min pomaknute za 5 N.



**Slika 6.12. Rezultati vlačnog ispitivanja prikazani s prednaprežanjem**

Slika 6.13. pokazuje usporedbu rezultata uzoraka E1 i E2 pri brzinama ispitivanja 5 i 500 mm/min, za slučaj s trenjem, bez predkondicioniranja.

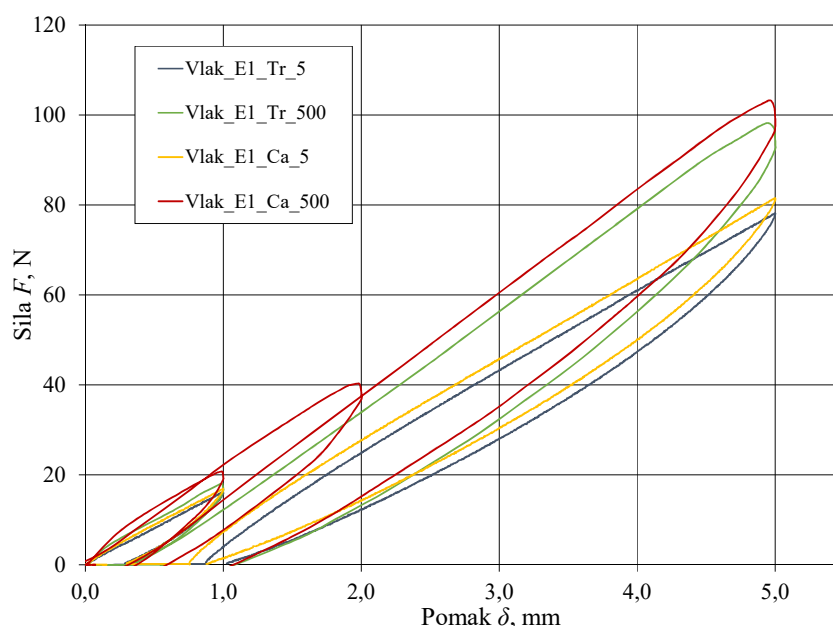


**Slika 6.13. Usporedba uzoraka E1 i E2**

Prilikom vlačnog ispitivanja pojavila se razlika u rezultatima za dva uzorka. Za analizu u daljnjem radu odabran je jedan uzorak i to onaj veće krutosti (uzorak E1). Na dijagramu se može vidjeti da su linije opterećenja gotovo linearne.



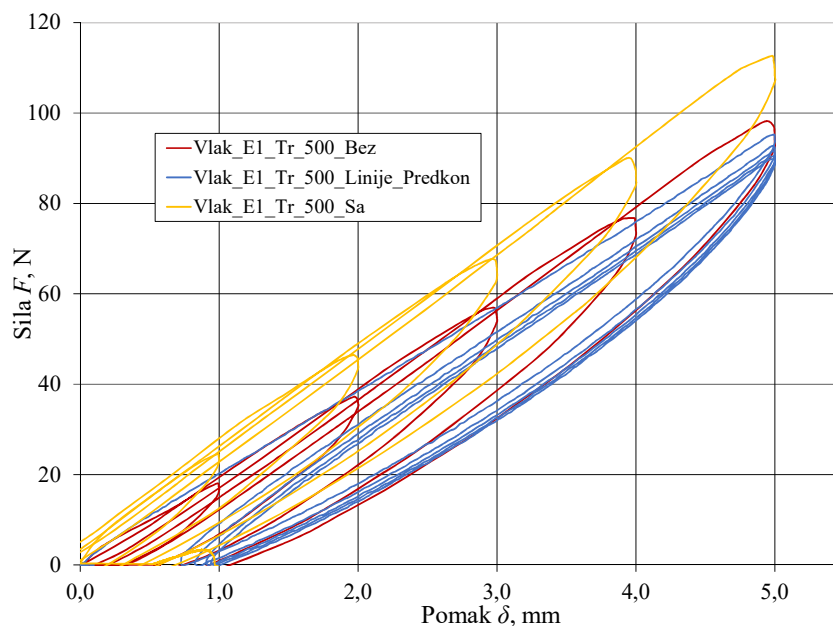
Slika 6.14. prikazuje rezultate mjerenja za uzorak E1 pri brzinama 5 i 500 mm/min za slučajeve sa i bez mazivog sredstva, bez predkondicioniranja.



**Slika 6.14. Uzorak E1 – rezultati sa i bez mazivog sredstva**

Prilikom vlačnog ispitivanja, uzorak premazan mazivim sredstvom (smanjeno trenje) treba veću silu  $F$  nego uzorak bez mazivog sredstva za ostvarivanje istog pomak  $\delta$ , što su neočekivani rezultati. Na dobivene rezultate je utjecalo prednaprezanje koje prikazuje Slika 6.12. Moguće je i da je nastupila određena količina mjerne greške jer kidalica na kojoj je izvođen eksperiment namijenjena je za rad s vrlo visokim silama (pri statičkom opterećenju postiže iznose sila do 50 kN), a vrijednosti sila prilikom vlačnog eksperimenta su iznosile oko 100 N. Kao i za slučaj tlačenja uzorka, porastom brzine tlačne deformacije raste utjecaj trenja na rezultate.

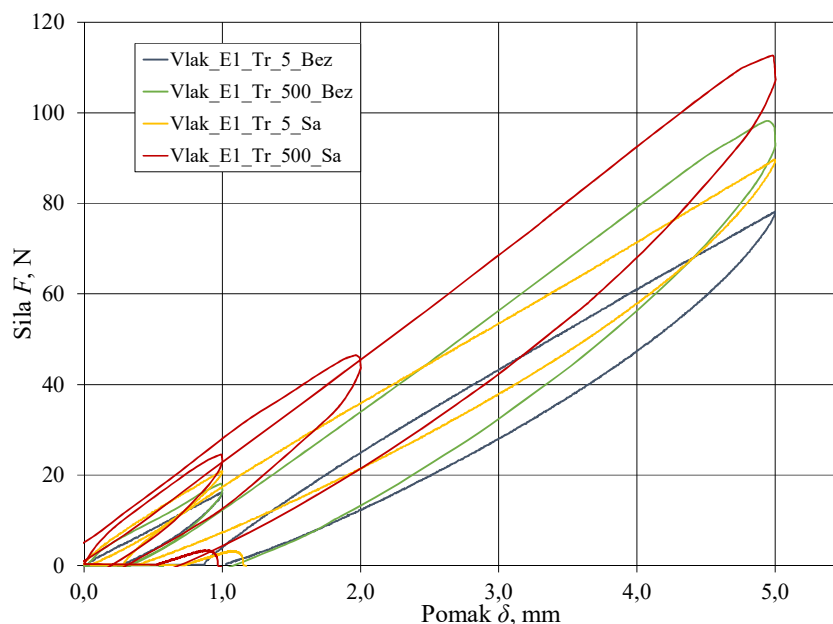
Slika 6.15. prikazuje rezultate ispitivanja na vlak pri brzini od 500 mm/min za slučaj bez mazivog sredstva, sa i bez predkondicioniranja. Kao i u slučaju tlaka, u nastavku rada linije predkondicioniranja su uklonjene.



**Slika 6.15. Rezultati sa i bez predkondicioniranja za brzinu od 500 mm/min i s trenjem**

Vidljivo je da predkondicioniranje povećava krutost uzorka. U slučaju vlačnog ispitivanja nema značajnije razlike u propadanju linije opterećenja za slučajeve sa i bez predkondicioniranja.

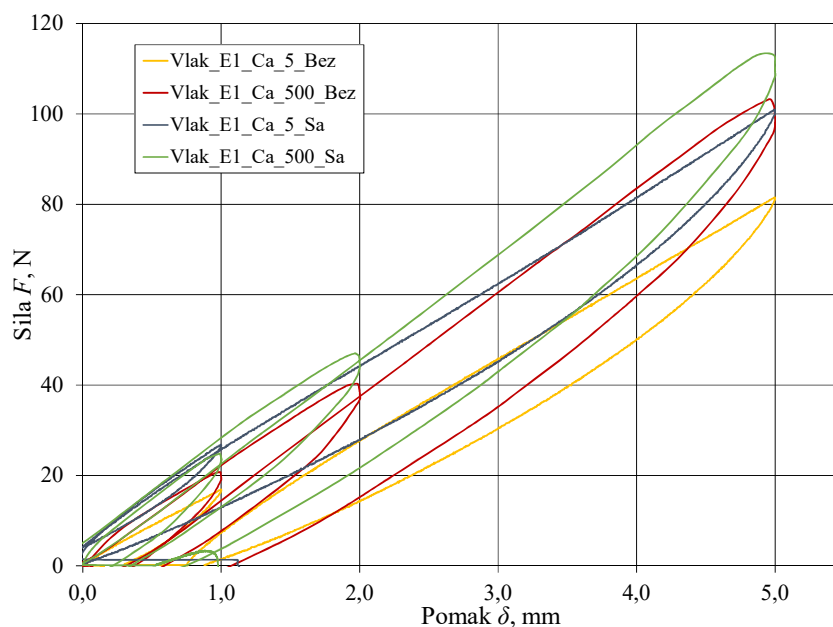
Slika 6.16. prikazuje usporedbu vlačnih ispitivanja uzorka pri brzini od 5 i 500 mm/min za slučaj sa i bez predkondicioniranja te bez mazivog sredstva.



**Slika 6.16. Rezultati sa i bez predkondicioniranja s trenjem**

Dijagram pokazuje značajnu razliku u krutosti uzorka za slučajeve sa i bez predkondicioniranja.

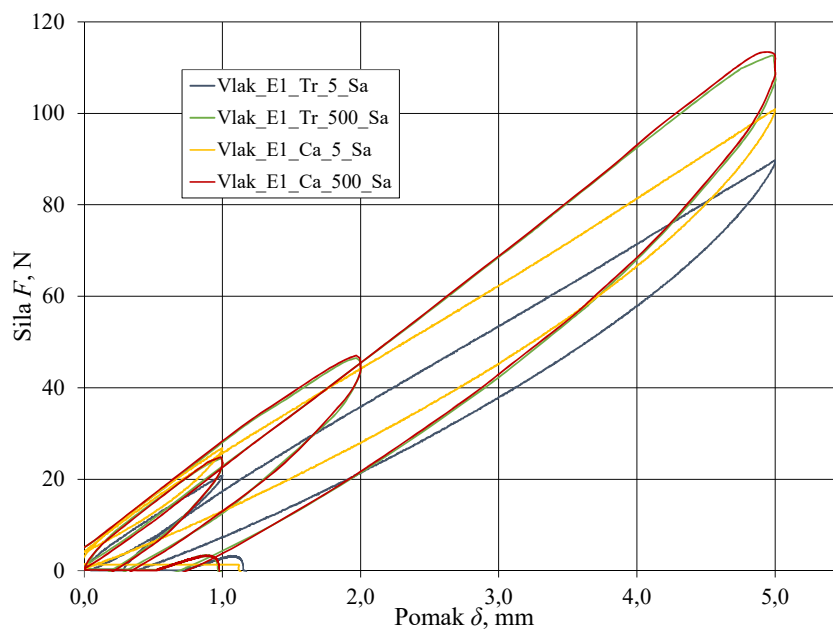
Slika 6.17. prikazuje usporedbu vlačnih ispitivanja uzorka pri brzini od 5 i 500 mm/min za slučaj sa i bez predkondicioniranja te sa mazivim sredstvom.



**Slika 6.17. Rezultati sa i bez predkondicioniranja s mazivim sredstvom**

Kao i za slučaj bez mazivog sredstva, u ovom se slučaju također vidi veća krutost uzorka za slučaj s predkondicioniranjem.

Slika 6.18. prikazuje utjecaj trenja na odnos sila-pomak za brzine 5 i 500 mm/min za slučaj s predkondicioniranjem.



**Slika 6.18. Utjecaj trenja za slučaj s predkondicioniranjem**

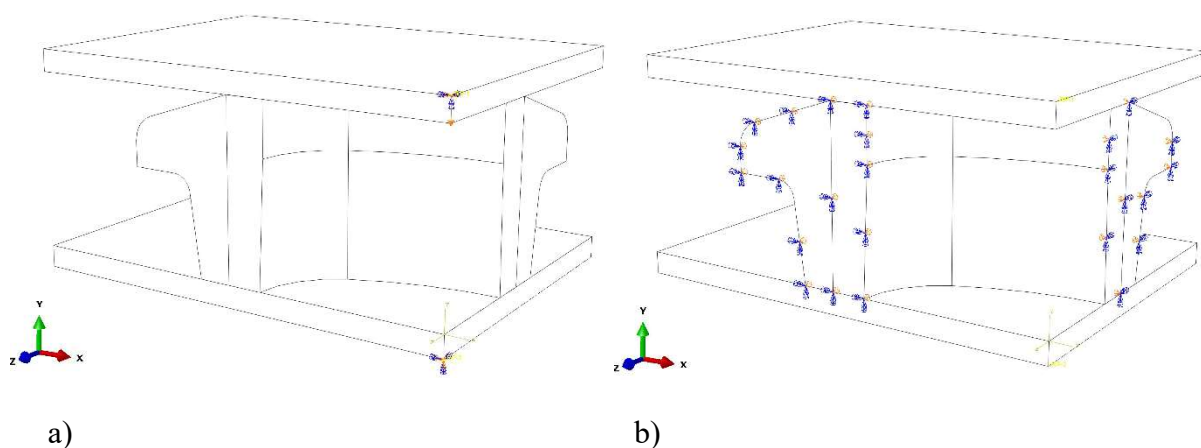
Smanjenjem trenja raste potrebna sila  $F$  za ostvarivanje željenog pomaka  $\delta$ . Porastom brzine vlačnog ispitivanja smanjuje se utjecaj trenja na konačne rezultate.

## 7. NUMERIČKA ANALIZA GUMENOG ELEMENTA

Numerička analiza gumenog elementa napravljena je u programskom paketu *Abaqus*. Cilj je da se poklapanjem rezultata numeričke analize i eksperimenta dobiju elastični parametri materijala gumenog zgloba rastojnika-prigušivača. U analizi je gumeni element opterećen na tlak i na vlak, identično kao tijekom eksperimenta.

### 7.1. Tlačno ispitivanje

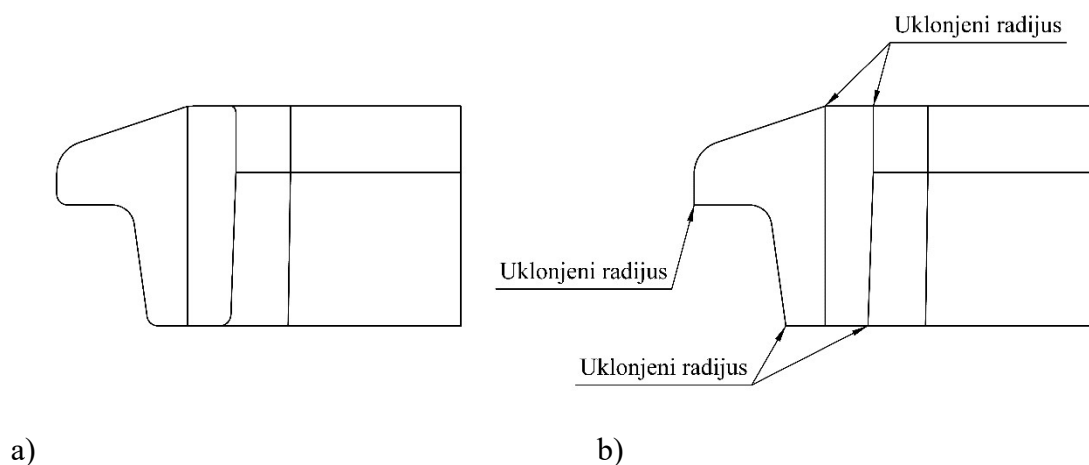
Prilikom izrade numeričkog modela gumeni element (visine  $h_0 = 20$  mm) postavljen je između dvije krute ploče kao što pokazuje Slika 6.3. Gornjoj ploči je zadan prisilni pomak ( $\delta = 5$  mm), a donjoj ploči je dodijeljen rubni uvjet uklještenja (Slika 7.1. a). I gornja i donja ploča su definirane kao *rigid body* (kruta tijela) te su rubni uvjeti i pomak zadani u referentnu točku. Gumeni element je dva puta simetričan stoga je korištena jedna četvrtina geometrije (Slika 7.1. b).



Slika 7.1. 3D model: a) zadano opterećenje i rubni uvjeti, b) simetrija

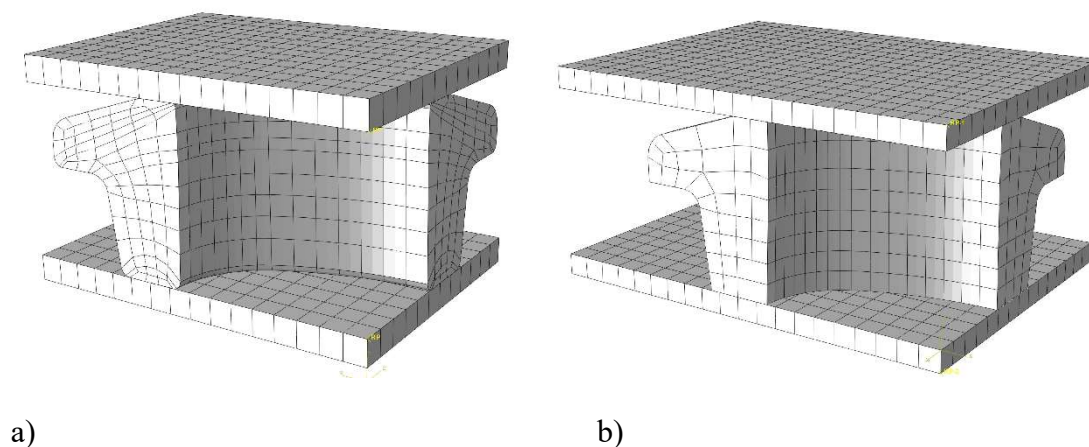
Kontakt između ploče i gumenog elementa definiran je kao *node-to-surface* kontakt. Zbog problema s prekidanjem analize, za slučajeve s manjim trenjem (slučajevi u kojima je korištenjem mazivog sredstva smanjeno trenje) *slave* ploha je definirana preko opcije *surface*, a za slučajeve s većim trenjem *slave* ploha je definirana kao *node region*. Zbog pretpostavke velikih klizanja plohe o plohu odabrana je opcija *finite-sliding*. Za definiranje ograničenja prijanjanja plohe o plohu odabrana je *penalty* metoda.

Zbog nemogućnosti dobivanja strukturirane mreže konačnih elemenata prilikom izrade, na gumenom elementu su uklonjeni pojedini radijusi (Slika 7.2.), te je napravljeno particioniranje modela.



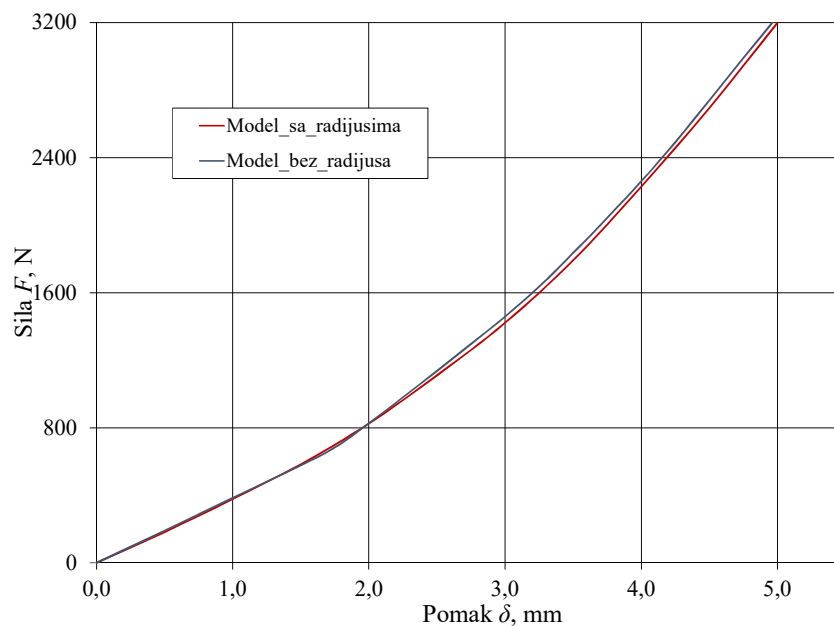
**Slika 7.2. Gumeni element: a) sa radijusima, b) bez radijusa**

Slika 7.3. a) prikazuje mrežu konačnih elemenata modela s radijusima, a Slika 7.3. b) prikazuje mrežu konačnih elemenata za odabrani model s uklonjenim radijusima.



**Slika 7.3. Mreža konačnih elemenata: a) model s radijusima, b) model bez radijusa**

Slika 7.4. prikazuje usporedbu rezultata modela s radijusima te bez radijusa.



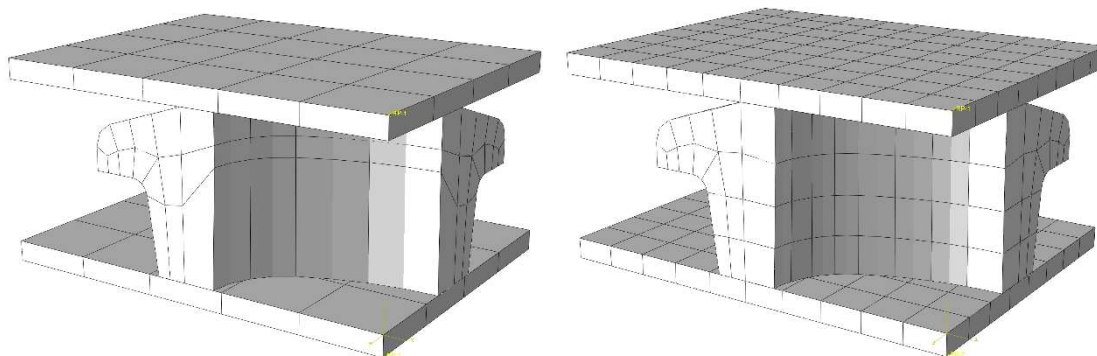
**Slika 7.4. Usporedba modela sa radijusima i bez radijusa**

Tablica 7.1. prikazuje relativnu grešku  $E_{rel}$  za modele sa i bez radijusa u odnosu na maksimalnu primijenjenu silu  $F_{max}$ .

**Tablica 7.1. Usporedba modela sa i bez radijusa**

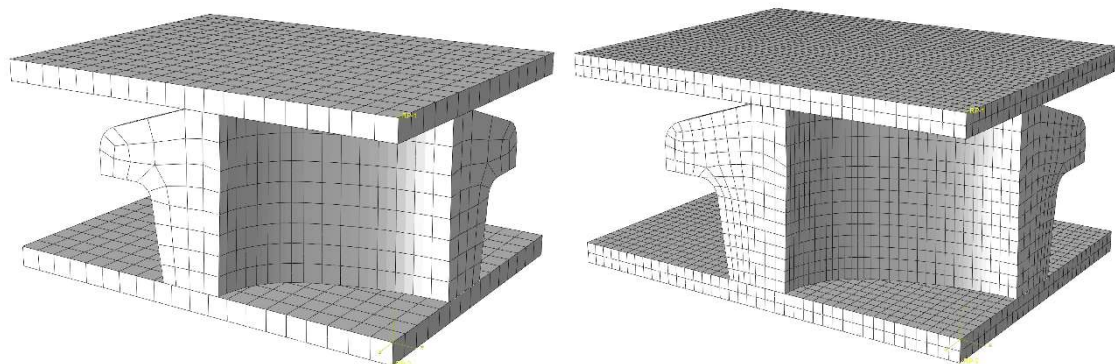
Model	$F_{max}$ , N	$E_{rel}$ , %
Sa radijusima	3199,18	-
Bez radijusa	3236,876	1,17

Ispitana je konvergencija rješenja za mreže s različitim brojem elemenata (u odnosu na maksimalnu primijenjenu silu  $F_{max}$ ) (Slika 7.6.). Slika 7.5. prikazuje mreže konačnih elemenata različite gustoće. Za kreiranje mreže su odabrani 3D C3D20RH hibridni elementi drugog reda.



a)

b)



c)

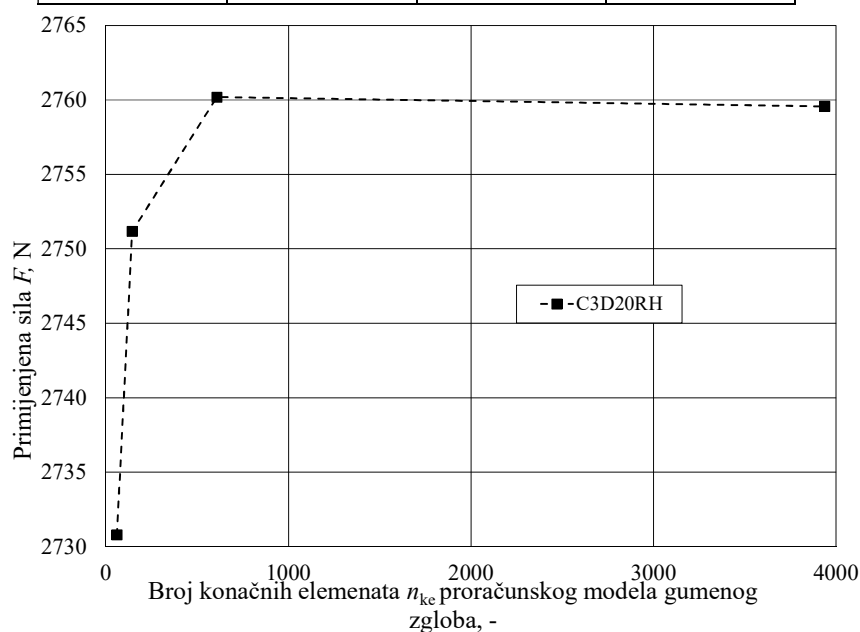
d)

**Slika 7.5. Mreže s različitim brojem konačnih elemenata: a) 60, b) 144, c) 608, d) 3937**

Tablica 7.2. prikazuje parametre s kojima je ispitana konvergencija mreže konačnih elemenata. Materijalni model, korišten prilikom konvergencije, je neo-Hooke model.

**Tablica 7.2. Geometrijsko materijalne karakteristike**

$\delta$ , mm	$C_{10}$ , MPa	$E_0$ , MPa	$\nu$
5	1,23	7,38	0,5



**Slika 7.6. Konvergencija rješenja za različite gustoće mreža**

Tablica 7.3. prikazuje usporedbu relativnih razlika  $E_{rel}$  mreža konačnih elemenata različite gustoće u odnosu na maksimalnu primijenjenu silu  $F_{max}$ . Rezultati prikazani u tablici dobiveni su usporedbom dviju susjednih mreža konačnih elemenata u odnosu na gustoću mreže.



Tablica 7.3. Usporedba rezultata dobivenih različitim gustoćama mreže

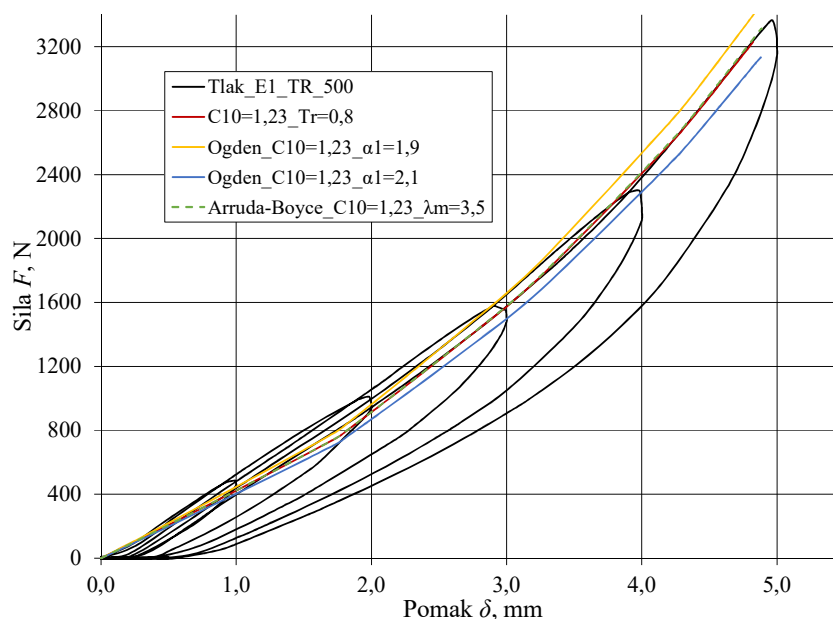
Broj konačnih elemenata $n_{ke}$	$F_{max}$ , N	$E_{rel}$ , %
60	2730,79	-
144	2751,18	0,75
608	2760,19	-0,33
3937	2759,57	-0,02

Vidljivo je da je relativna greška između dvije najgušće mreže vrlo mala te je daljnja analiza napravljena s mrežom načinjenom od 608 konačnih elemenata (Slika 7.5. c).

Slika 7.7. uspoređuje neo-Hooke, Ogden i Arruda-Boyce materijalne modele kako bi se odabrao jedan model s kojim će se raditi analiza. Navedeni modeli su odabrani jer zadovoljavaju Druckerov test stabilnosti [8]. Da bi materijalni model zadovoljio Druckerov kriterij stabilnosti mora zadovoljiti određene restrikcije elastičnosti te prikazati realno mogući način deformiranja. Za izotropne, nestlačive materijale, Druckerov kriterij može se prema [8] izraziti u obliku

$$\sigma, \varepsilon \neq f(t) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \geq 0. \quad (7.1)$$

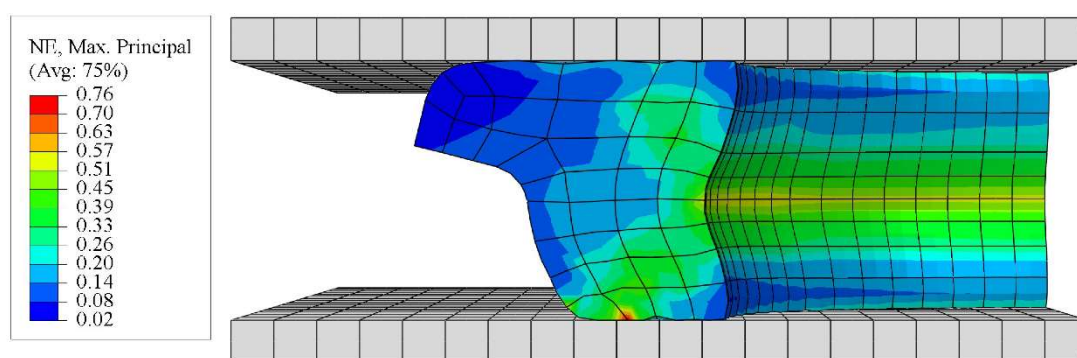
Druckerov kriterij stabilnosti predstavlja pozitivnu promjenu energije u zatvorenom ciklusu.



Slika 7.7. Usporedba materijalnih modela

Na slici je prikazano da se mijenjanjem drugog parametra za složenije materijalne modele Ogden i Arruda-Boyce ne povećava numerička točnost rezultata u usporedbi s rezultatima eksperimenta. Stoga je u nastavku rada korišten neo-Hooke materijalni model. Pretpostavka korištena u radu je da je materijal potpuno nestlačiv, odnosno da je  $D_1 = 0 \text{ MPa}^{-1}$ . S obzirom da je odabran hiperelastični materijalni model, a rezultati eksperimenta su dobiveni u obliku histereze, u daljnjem radu su prikazana preklapanja samo krivulje opterećenja odnosa sila-pomak.

Slika 7.8. prikazuje iznos maksimalnih deformacija,  $\varepsilon \approx 76\%$ . Toliki iznos deformacija izlazi iz područja primijene za neo-Hooke model koji prema [30] iznosi do  $\approx 40\%$ .

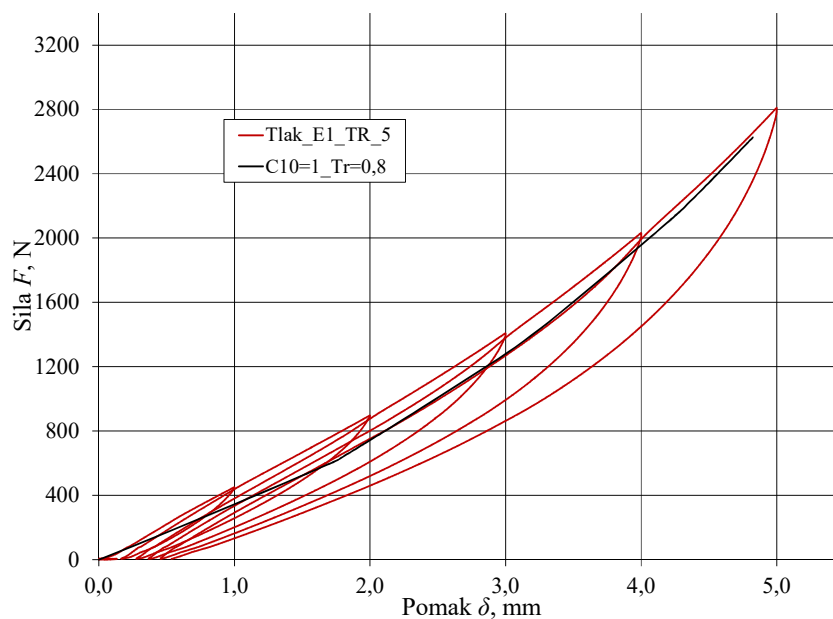


Slika 7.8. Iznos maksimalnih deformacija

### 7.1.1. Rezultati tlačnog ispitivanja

U ovom poglavlju uspoređeni su rezultati dobiveni numeričkom analizom i eksperimentom za slučaj tlačnog opterećenja. Rezultati su prikazani za brzine 5, 50 i 500 mm, za slučajeve sa trenjem i mazivim sredstvom, bez predkondicioniranja.

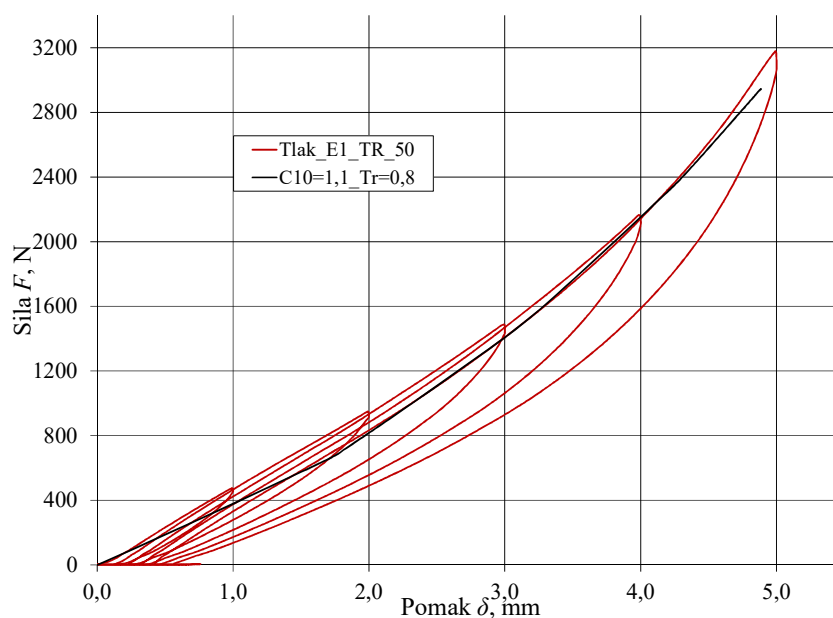
Slika 7.9. prikazuje preklapanje rezultata eksperimenta napravljenog tlačenjem gumenog elementa pri brzini od 5 mm/min bez korištenja mazivog sredstva te numeričke analize.



**Slika 7.9. Tlačno opterećenje pri brzini od 5 mm/min bez mazivog sredstva**

Materijalna konstanta  $C_{10}$  dobivena za gore navedeni slučaj iznosi  $C_{10} = 1$  MPa, a faktor trenja  $\mu = 0,8$ .

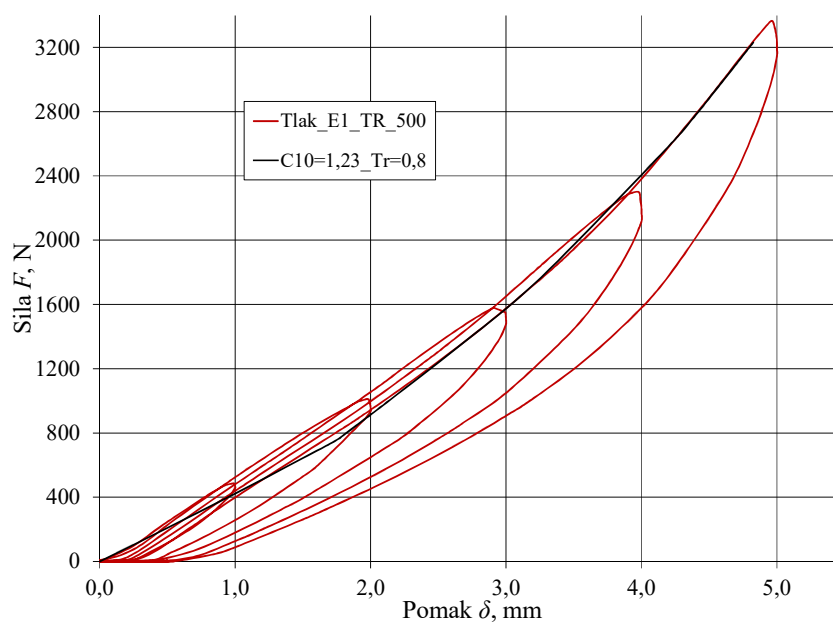
Slika 7.10. prikazuje preklapanje rezultata eksperimenta napravljenog tlačenjem gumenog elementa pri brzini od 50 mm/min bez korištenja mazivog sredstva te numeričke analize.



**Slika 7.10. Tlačno opterećenje pri brzini od 50 mm/min bez mazivog sredstva**

Materijalna konstanta  $C_{10}$  dobivena za gore navedeni slučaj iznosi  $C_{10} = 1,1$  MPa, a faktor trenja  $\mu = 0,8$ .

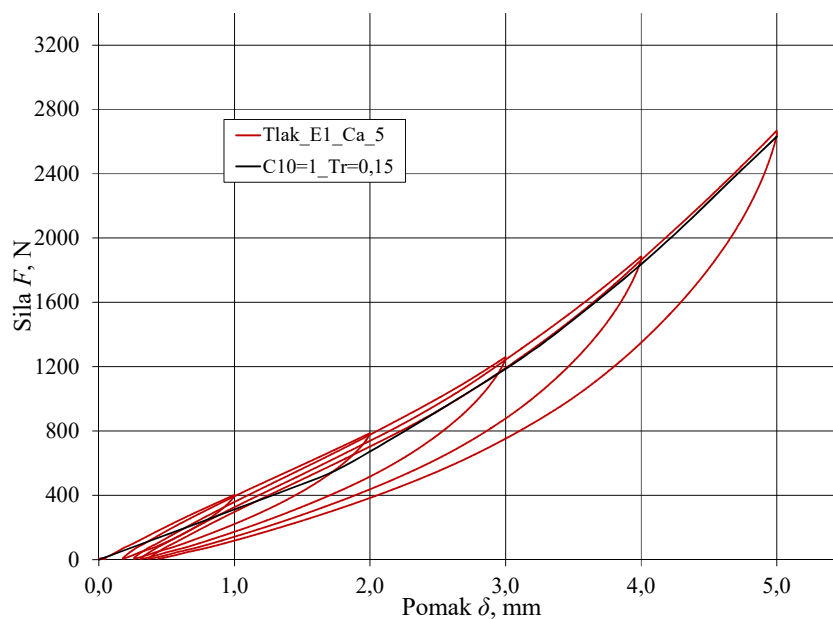
Slika 7.11. prikazuje preklapanje rezultata eksperimenta napravljenog tlačenjem gumenog elementa pri brzini od 500 mm/min bez korištenja mazivog sredstva te numeričke analize.



**Slika 7.11. Tlačno opterećenje pri brzini od 500 mm/min bez mazivog sredstva**

Materijalna konstanta  $C_{10}$  dobivena za gore navedeni slučaj iznosi  $C_{10} = 1,23$  MPa, a faktor trenja  $\mu = 0,8$ .

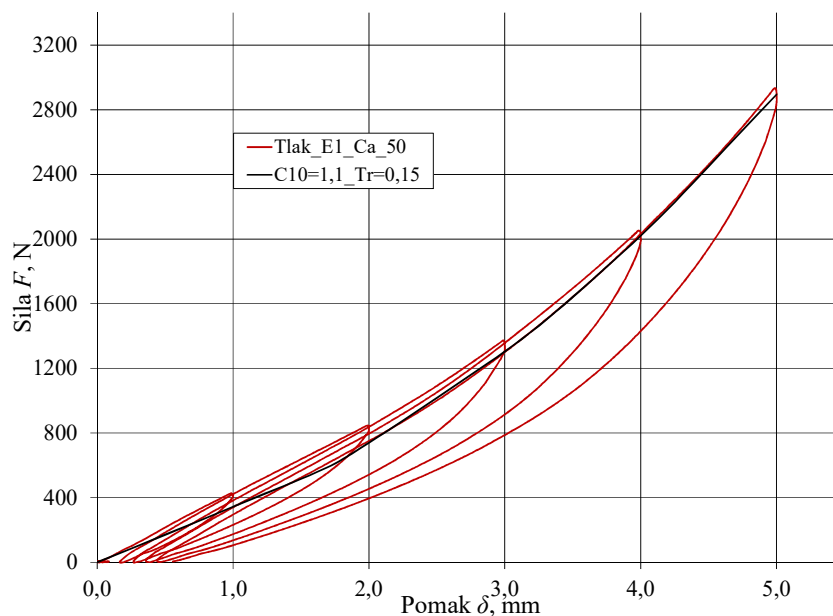
Slika 7.12. prikazuje preklapanje rezultata eksperimenta napravljenog tlačenjem gumenog elementa pri brzini od 5 mm/min, sa smanjenim trenjem korištenjem mazivog sredstva, te numeričke analize.



**Slika 7.12. Tlačno opterećenje pri brzini od 5 mm/min sa mazivim sredstvom**

Materijalna konstanta  $C_{10}$  dobivena za gore navedeni slučaj iznosi  $C_{10} = 1$  MPa, a faktor trenja  $\mu = 0,15$ .

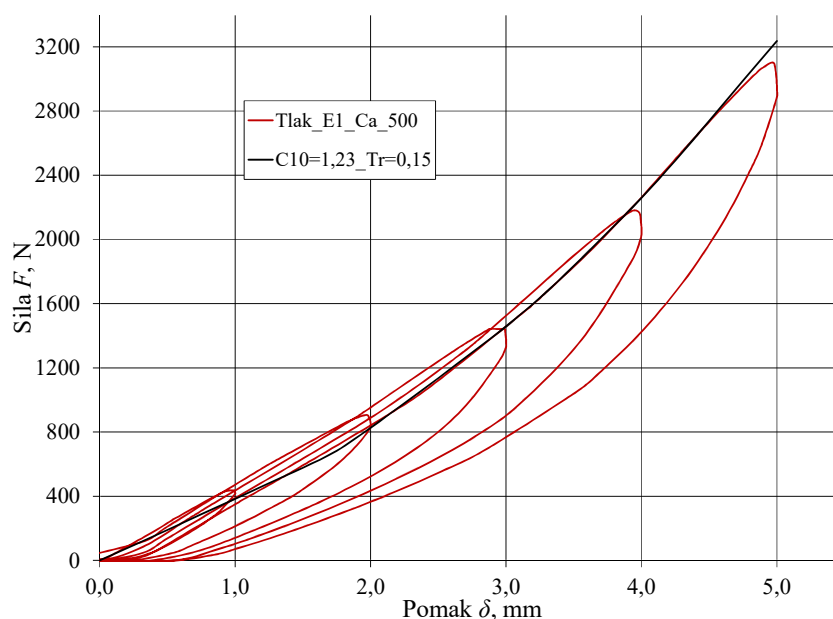
Slika 7.13. prikazuje preklapanje rezultata eksperimenta napravljenog tlačenjem gumenog elementa pri brzini od 50 mm/min, sa smanjenim trenjem korištenjem mazivog sredstva, te numeričke analize.



**Slika 7.13. Tlačno opterećenje pri brzini od 50 mm/min sa mazivim sredstvom**

Materijalna konstanta  $C_{10}$  dobivena za gore navedeni slučaj iznosi  $C_{10} = 1,1$  MPa, a faktor trenja  $\mu = 0,15$ .

Slika 7.14. prikazuje preklapanje rezultata eksperimenta napravljenog tlačenjem gumenog elementa pri brzini od 500 mm/min, sa smanjenim trenjem korištenjem mazivog sredstva, te numeričke analize.



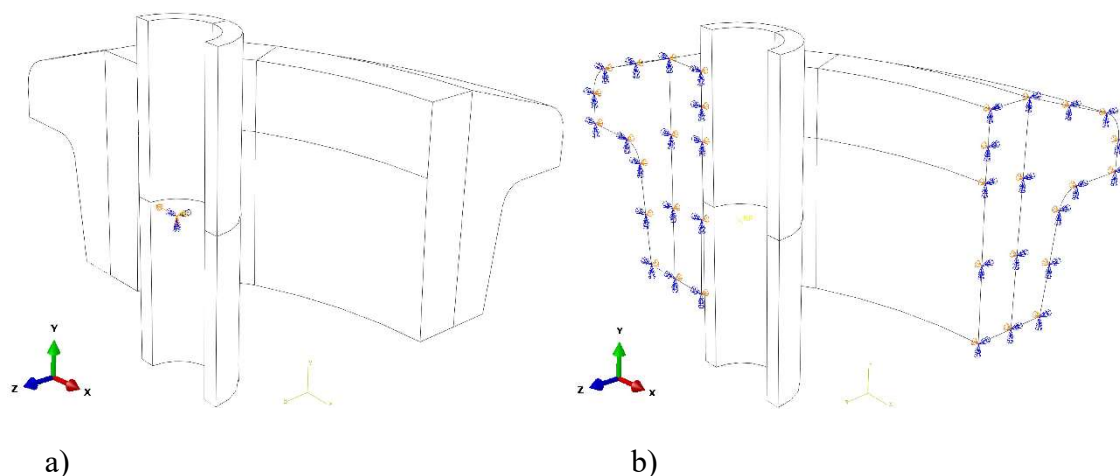
**Slika 7.14. Tlačno opterećenje pri brzini od 500 mm/min sa mazivim sredstvom**

Materijalna konstanta  $C_{10}$  dobivena za gore navedeni slučaj iznosi  $C_{10} = 1,23$  MPa, a faktor trenja  $\mu = 0,15$ .

Rezultati dobiveni numeričkom analizom poklapaju se s rezultatima dobivenim eksperimentom za slučaj tlačnog opterećenja gumenog elementa. Za slučaj bez mazivog sredstva dobivene su materijalne konstante  $C_{10}$  za sve tri brzine deformiranja. Smanjenjem faktora trenja  $\mu$  za iste vrijednosti materijalnih konstanti dobivena su preklapanja rezultata numerike i eksperimenta.

## 7.2. Vlačno ispitivanje

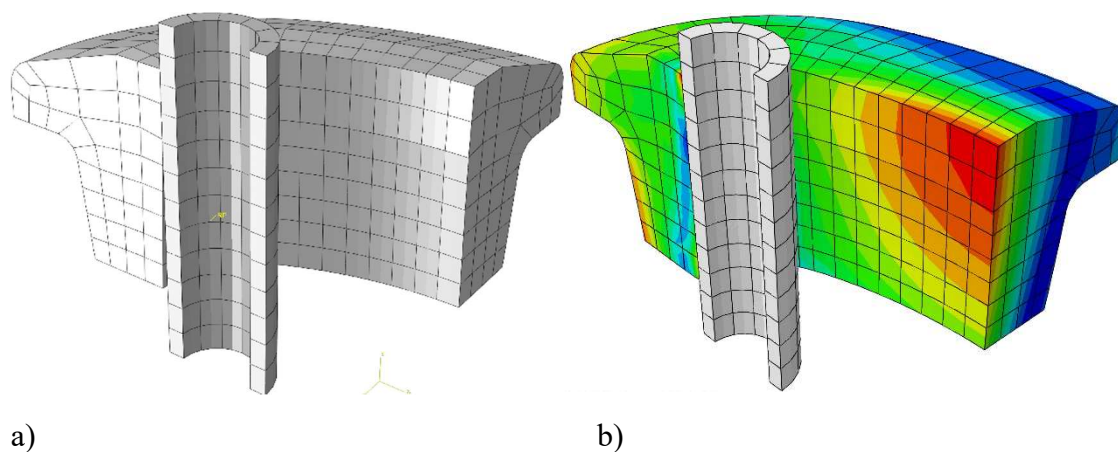
Prilikom izrade numeričkog modela gumeni element je postavljen u kontakt s cilindrom kao što pokazuje Slika 6.11. Cilindru je zadan prisilni pomak ( $\delta = 5$  mm). Gumenom elementu dodijeljeni su odgovarajući rubni uvjeti simetrije (Slika 7.15. b). Cilindar je definiran kao *rigid body* (kruto tijelo) te su rubni uvjeti i opterećenje zadani u dodijeljenu referentnu točku (Slika 7.15. a). Gumeni element je dva puta simetričan stoga je korištena jedna četvrtina geometrije.



**Slika 7.15. 3D model: a) zadano opterećenje i rubni uvjeti, b) simetrija**

Kontakt između cilindra i gumenog elementa definiran je kao *node-to-surface* kontakt, a *slave* ploha definirana je opcijom *surface*. Zbog pretpostavke velikih klizanja plohe o plohu odabrana je opcija *finite-sliding*. Za definiranje ograničenja prijanjanja plohe o plohu odabrana je *penalty* metoda.

Postupak prilikom izrade mreže konačnih elemenata identičan je postupku prikazanom u poglavlju 7.1. Odabrana je mreža identične gustoće kao prilikom analize tlačnog opterećenja (poglavlje 7.1.) te su za kreiranje mreže odabrani identični 3D C3D20RH hibridni elementi drugog reda (Slika 7.16.).



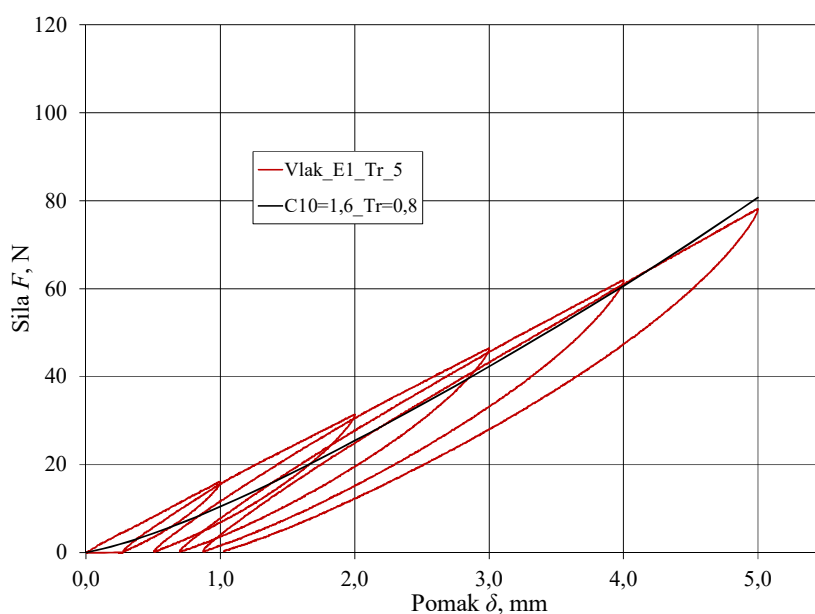
**Slika 7.16. a) Mreža konačnih elemenata, b) deformirani gumeni element**

Materijalni model koji je korišten je neo-Hooke model, kao što je objašnjeno u poglavlju 7.1.

### 7.2.1. Rezultati vlačnog ispitivanja

U ovom poglavlju uspoređeni su rezultati dobiveni numeričkom analizom i eksperimentom za slučaj vlačnog opterećenja. Rezultati su prikazani za brzine 5, 50 i 500 mm/min, za slučajeve sa trenjem i mazivim sredstvom, bez predkondicioniranja.

Slika 7.17. prikazuje preklapanje rezultata eksperimenta napravljenog vlačnim opterećenjem gumenog elementa pri brzini od 5 mm/min bez korištenja mazivog sredstva, te numeričke analize.

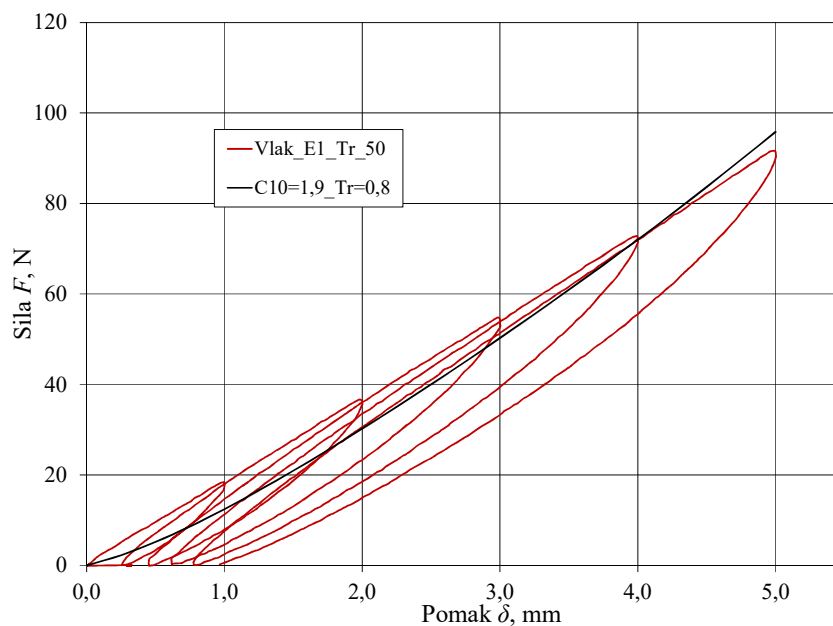


**Slika 7.17. Vlačno opterećenje pri brzini od 5 mm/min bez mazivog sredstva**

Materijalna konstanta  $C_{10}$  dobivena za gore navedeni slučaj iznosi  $C_{10} = 1,6$  MPa, a faktor trenja  $\mu = 0,8$ .

Slika 7.18. prikazuje preklapanje rezultata eksperimenta napravljenog vlačnim opterećenjem gumenog elementa pri brzini od 50 mm/min bez korištenja mazivog sredstva, te numeričke analize.

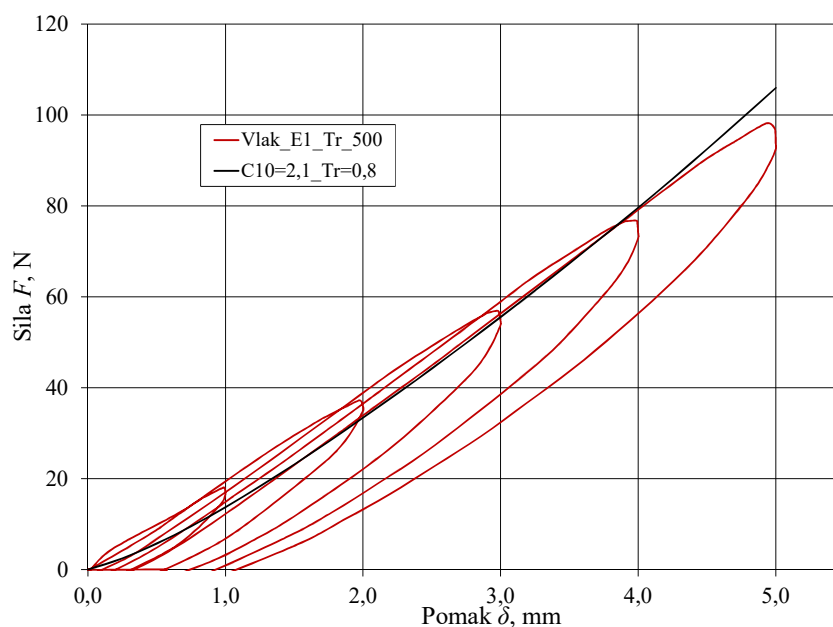




**Slika 7.18. Vlačno opterećenje pri brzini od 50 mm/min bez mazivog sredstva**

Materijalna konstanta  $C_{10}$  dobivena za gore navedeni slučaj iznosi  $C_{10} = 1,9$  MPa, a faktor trenja  $\mu = 0,8$ .

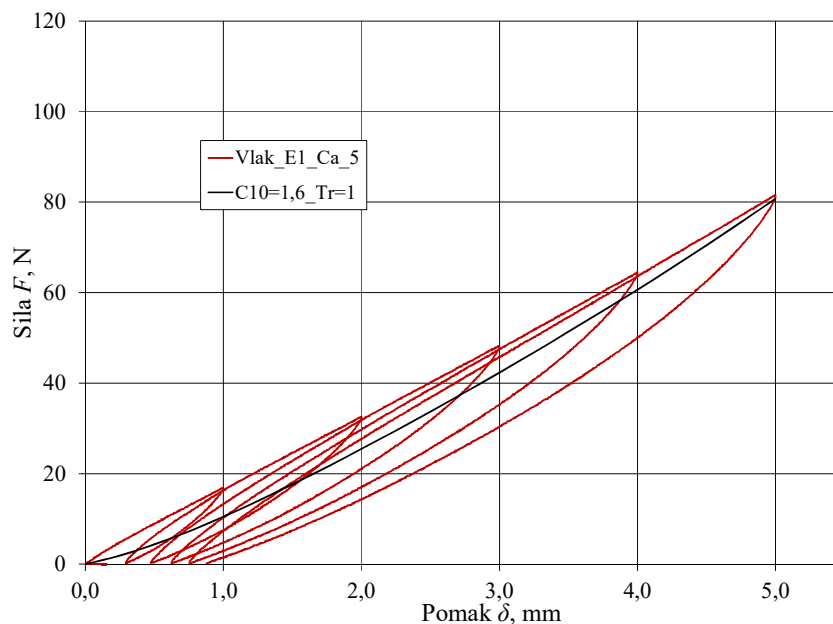
Slika 7.19. prikazuje preklapanje rezultata eksperimenta napravljenog vlačnim opterećenjem gumenog elementa pri brzini od 500 mm/min bez korištenja mazivog sredstva, te numeričke analize.



**Slika 7.19. Vlačno opterećenje pri brzini od 500 mm/min bez mazivog sredstva**

Materijalna konstanta  $C_{10}$  dobivena za gore navedeni slučaj iznosi  $C_{10} = 2,1$  MPa, a faktor trenja  $\mu = 0,8$ .

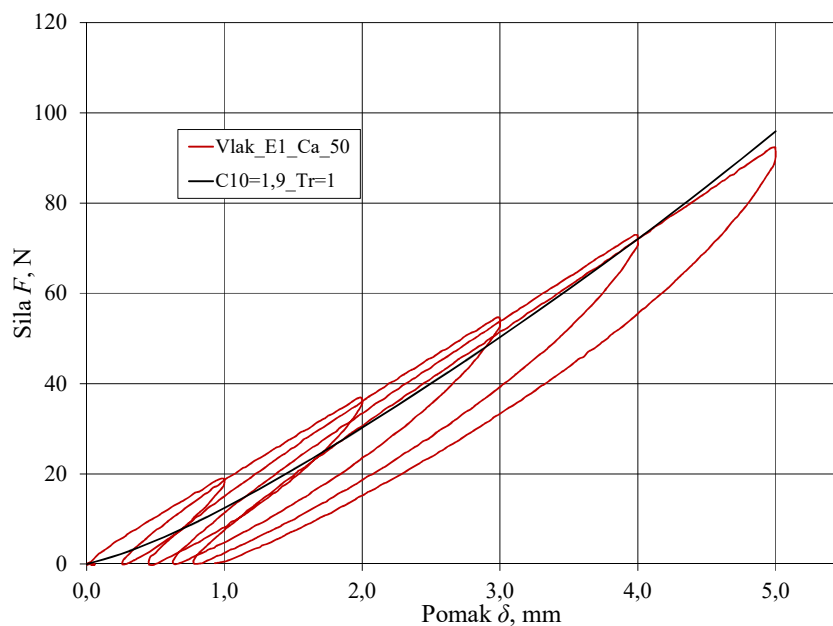
Slika 7.20. prikazuje preklapanje rezultata eksperimenta napravljenog vlačnim opterećenjem gumenog elementa pri brzini od 5 mm/min uz korištenje mazivog sredstva, te numeričke analize.



**Slika 7.20. Vlačno opterećenje pri brzini od 5 mm/min s mazivim sredstvom**

Materijalna konstanta  $C_{10} = 1,6$  MPa, dobivena za brzinu vlačne deformacije od 5 mm/min u slučaju bez mazivog sredstva, ne može se poklopiti s rezultatima eksperimenta za istu brzinu deformacije uz korištenje mazivog sredstva podešavanjem faktora trenja  $\mu$ .

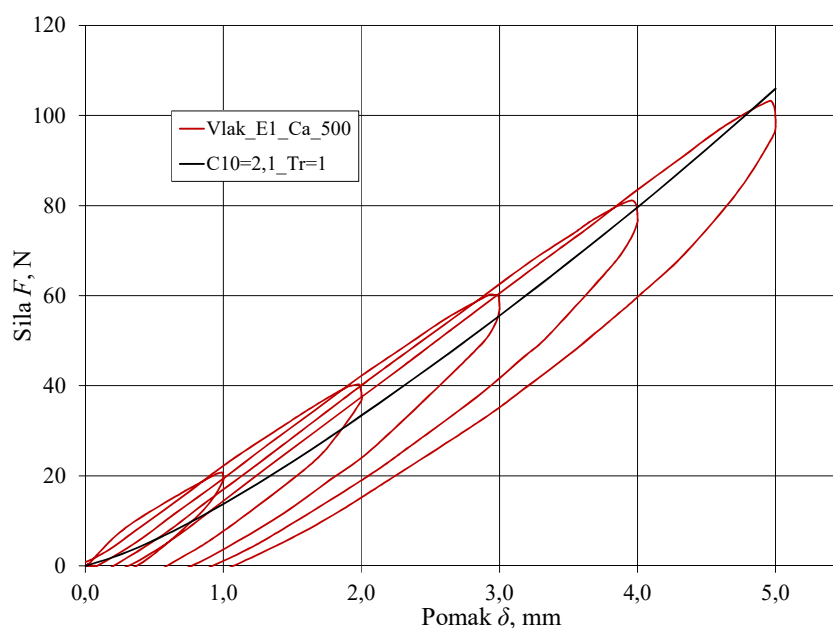
Slika 7.21. prikazuje preklapanje rezultata eksperimenta napravljenog vlačnim opterećenjem gumenog elementa pri brzini od 50 mm/min uz korištenje mazivog sredstva, te numeričke analize.



**Slika 7.21. Vlačno opterećenje pri brzini od 50 mm/min s mazivim sredstvom**

Materijalna konstanta  $C_{10} = 1,9$  MPa, dobivena za brzinu vlačne deformacije od 50 mm/min u slučaju bez mazivog sredstva, ne može se poklopiti s rezultatima eksperimenta za istu brzinu deformacije uz korištenje mazivog sredstva podešavanjem faktora trenja  $\mu$ .

Slika 7.22. prikazuje preklapanje rezultata eksperimenta napravljenog vlačnim opterećenjem gumenog elementa pri brzini od 500 mm/min uz korištenje mazivog sredstva, te numeričke analize.



**Slika 7.22. Vlačno opterećenje pri brzini od 500 mm/min s mazivim sredstvom**

Materijalna konstanta  $C_{10} = 2,1$  MPa, dobivena za brzinu vlačne deformacije od 500 mm/min u slučaju bez mazivog sredstva, ne može se poklopiti s rezultatima eksperimenta za istu brzinu deformacije uz korištenje mazivog sredstva podešavanjem faktora trenja  $\mu$ .

Rezultati dobiveni numeričkom analizom ne poklapaju se s rezultatima dobivenim eksperimentom za slučaj vlačnog opterećenja gumenog elementa sa smanjenim trenjem uz korištenje mazivog sredstva. Numerička analiza pokazuje da se smanjenjem trenja smanjuje i sila potrebna za postizanje zadanog pomaka, dok eksperiment pokazuje da smanjenjem trenja raste potrebna sila za postizanje zadanog pomaka.

### 7.3. Određivanje materijalnih parametara gumenog elementa

Određivanje materijalnih parametara gumenog elementa napravljeno je preklapanjem rezultata eksperimenta i numeričke analize za slučajeve tlačnog i vlačnog deformiranja. Cilj je odrediti tri hiperelastične materijalne konstante  $C_{10}$  za svaku od tri brzina deformiranja (5, 50 i 500 mm/min), te dva faktora trenja  $\mu$  za slučajeve sa i bez mazivog sredstva.

Tablica 7.4. prikazuje usporedbu materijalnih konstanti  $C_{10}$  i faktora trenja  $\mu$  za tlačno deformiranje gumenog elementa pri brzini od 5, 50 i 500 mm/min za slučajeve bez mazivog sredstva i sa mazivim sredstvom.

**Tablica 7.4. Usporedba rezultata za tlačno opterećenje**

v, mm/min	Bez mazivog sredstva		Sa mazivim sredstvom	
	$C_{10}$ , MPa	$\mu$ , -	$C_{10}$ , MPa	$\mu$ , -
5	1	0,8	1	0,15
50	1,1	0,8	1,1	0,15
500	1,23	0,8	1,23	0,15

Iz tablice je vidljivo da se za svaku brzinu deformacije poklapaju materijalna konstanta  $C_{10}$  i faktori trenja  $\mu$  za slučajeve sa i bez mazivog trenja.

Tablica 7.5. prikazuje usporedbu materijalnih konstanti  $C_{10}$  i faktora trenja  $\mu$  za vlačno deformiranje gumenog elementa pri brzini od 5, 50 i 500 mm/min za slučajeve bez mazivog sredstva i sa mazivim sredstvom.

**Tablica 7.5. Usporedba rezultata za vlačno opterećenje**

$v$ , mm/min	Bez mazivog sredstva		Sa mazivim sredstvom	
	$C_{10}$ , MPa	$\mu$ , -	$C_{10}$ , MPa	$\mu$ , -
5	1,6	0,8	1,6	1
50	1,9	0,8	1,9	1
500	2,1	0,8	1,9	1

Iz tablice je vidljivo da je nemoguće poklopiti materijalne konstante  $C_{10}$  za vlačno deformiranje podešavanjem faktora trenja  $\mu$  za slučajeve sa i bez mazivog sredstva. Razlog nemogućnosti poklapanja objašnjen je u poglavlju 7.2.1.

Tablica 7.6. prikazuje usporedbu materijalnih konstanti  $C_{10}$  za tlačno i vlačno opterećenje gumenog elementa pri brzini deformiranja od 5, 50 i 500 mm/min.

**Tablica 7.6. Usporedba rezultata dobivenih tlačnim i vlačnim deformiranjem**

$v$ , mm/min	Tlak	Vlak	$E_{rel}$ , %
	$C_{10}$ , MPa	$C_{10}$ , MPa	
5	1	1,6	-37,5
50	1,1	1,9	-42,1
500	1,23	2,1	-41,4

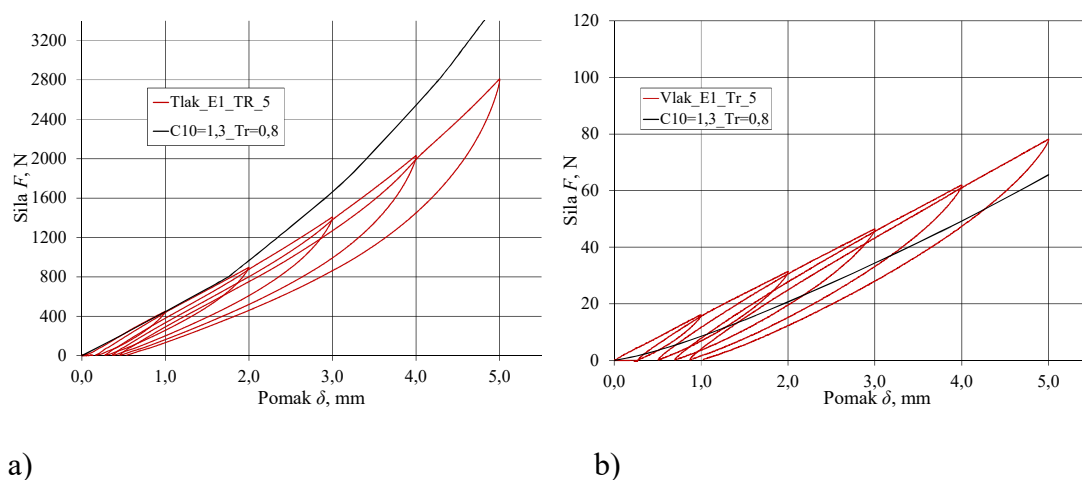
Usporedba rezultata za tlačno i vlačno opterećenje pokazuje nepoklapanja. Razlika između materijalne konstante  $C_{10}$  je  $\approx 40\%$  za sve tri brzine. Zajednička vrijednost materijalne konstante  $C_{10}$  za tlačno i vlačno opterećenje određeno je kao aritmetička sredina pojedinačnih vrijednosti za tlak i vlak (Tablica 7.7.).

**Tablica 7.7. Zajednička vrijednost materijalne konstante  $C_{10}$  za tlak i vlak po brzinama deformacije**

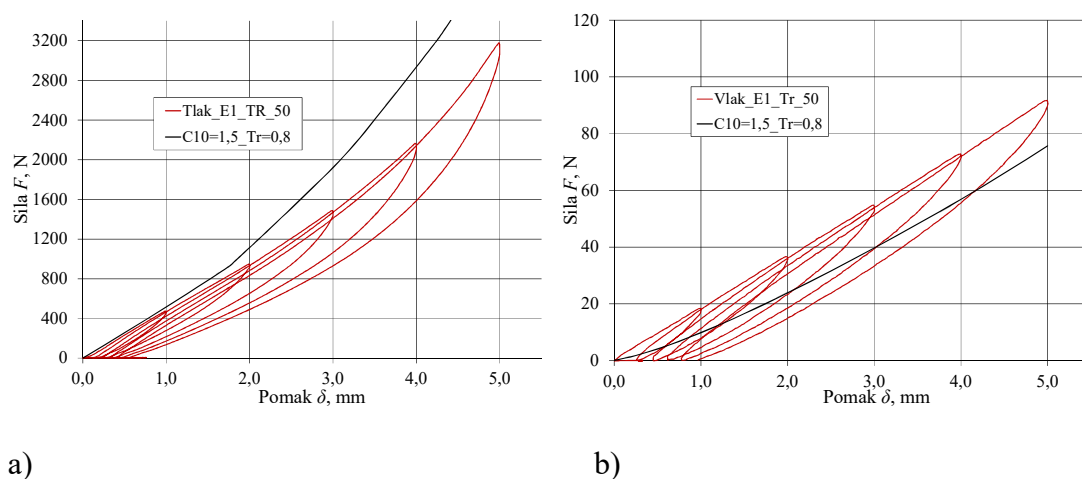
$v$ , mm/min	$C_{10}$ , MPa
5	1,3
50	1,5
500	1,665

Zajednički faktor trenja  $\mu$  za tlačno i vlačno opterećenje iznosi  $\mu = 0,8$  za slučaj bez mazivog sredstva. Zbog nemogućnosti preklapanja rezultata numerike i eksperimenta za vlačno opterećenje sa smanjenim trenjem, nemoguće je odrediti zajednički faktor trenja za tlačno i vlačno opterećenje. Stoga se za taj slučaj uzima faktor trenja iz tlačnog opterećenja koji iznosi  $\mu = 0,15$ .

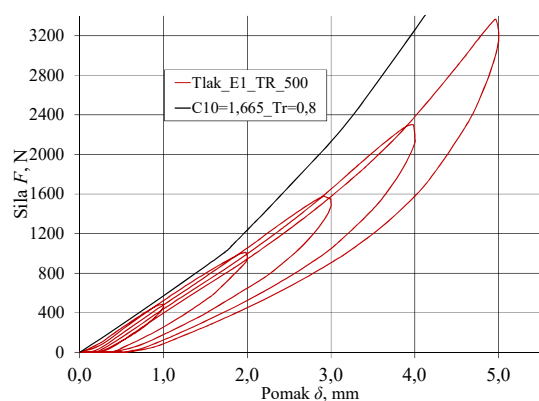
Slika 7.23. - Slika 7.28. prikazuju preklapanje rezultata numeričkog rješenja s odabranim konstantama  $C_{10}$  te eksperimenta za deformiranja pri brzinama od 5, 50 i 500 mm/min za slučajeve sa i bez mazivog sredstva.



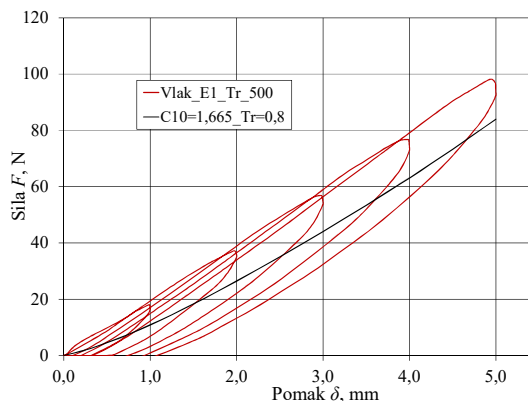
**Slika 7.23. Opterećenje pri brzini od 5 mm/min bez mazivog sredstva: a) tlak, b) vlak**



**Slika 7.24. Opterećenje pri brzini od 50 mm/min bez mazivog sredstva: a) tlak, b) vlak**

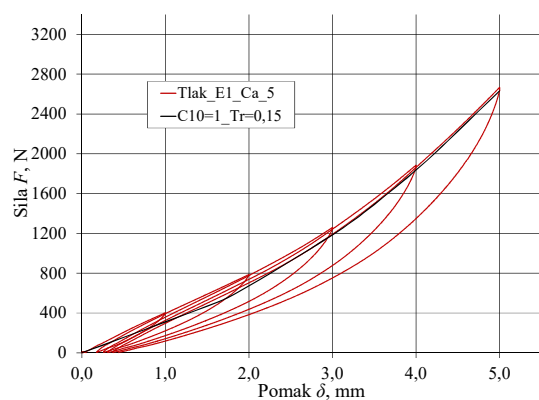


a)

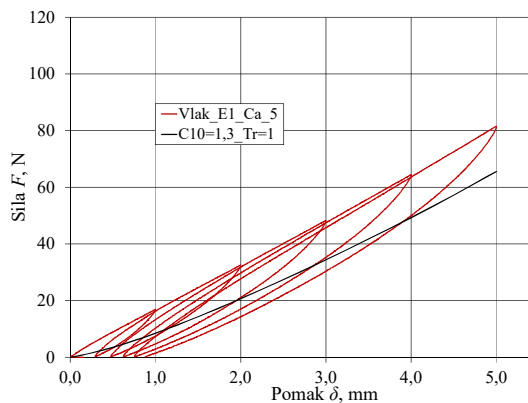


b)

Slika 7.25. Opterećenje pri brzini od 500 mm/min bez mazivog sredstva: a) tlak, b) vlak

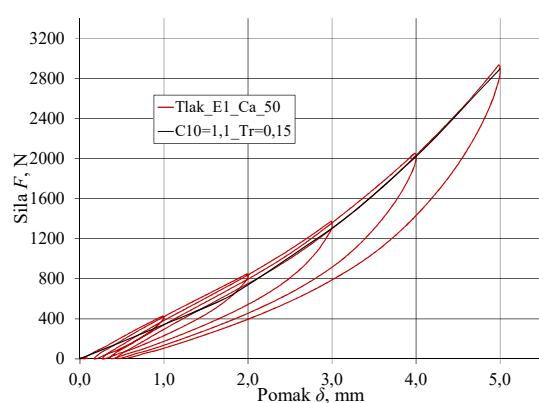


a)

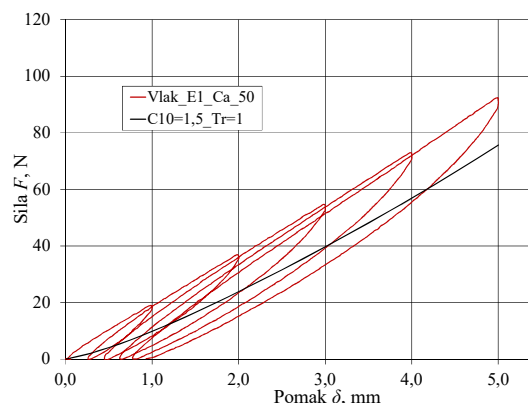


b)

Slika 7.26. Opterećenje pri brzini od 5 mm/min sa mazivim sredstvom: a) tlak, b) vlak

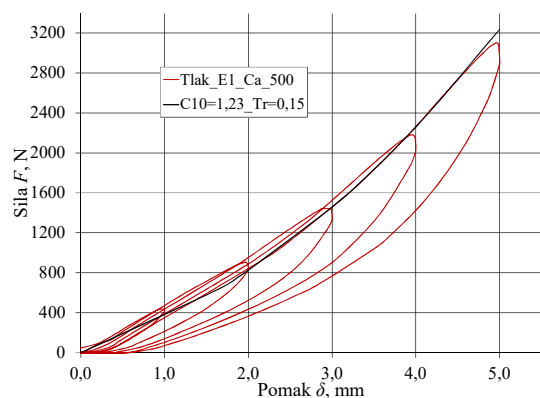


a)

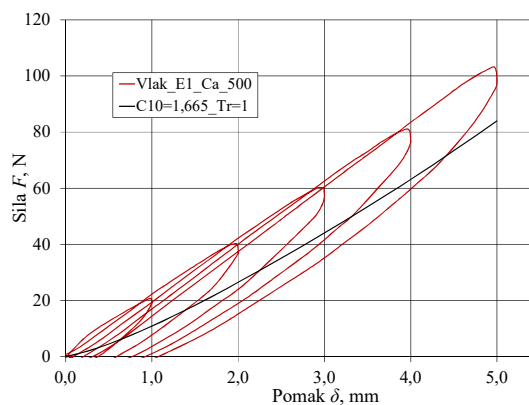


b)

Slika 7.27. Opterećenje pri brzini od 50 mm/min sa mazivim sredstvom: a) tlak, b) vlak



a)



b)

**Slika 7.28. Opterećenje pri brzini od 500 mm/min sa mazivim sredstvom: a) tlak, b) vlak**

Iz dijagrama je vidljivo da se rezultati numeričke analize i eksperimenta ne poklapaju. Može se primijetiti da je pogođen trend krivulje. I u numeričkoj analizi i u eksperimentu krivulje imaju progresivnu karakteristiku.



## 8. ZAKLJUČAK

Tema rada je analiza gumenog elementa rastojnika-prigušivača pomoću metode konačnih elemenata, u svrhu dobivanja elastičnih parametara materijala gumenog elementa.

U radu je opisana pojava aeolskih vibracija i način na koji se aeolske vibracije prigušuju korištenjem rastojnika-prigušivača. Ukratko je objašnjena kontakt mehanika, te su objašnjene postavke prilikom definiranja kontakta u programskom paketu *Abaqus*. Zatim je objašnjena geometrijska nelinearnost te materijalna nelinearnost uslijed korištenja hiperelastičnog materijala (gume). Za svaki tip nelinearnosti verificirani su konačni elementi usporedbom numeričkih rješenja s analitičkim.

Objašnjeno je izvođenje eksperimenta koji je izvršen cikličkim opterećivanjem gumenog elementa. Na dobivenim rezultatima vidljiva je krivulja sila-pomak u obliku histereze.

Vlačni dio eksperimenta prvo je napravljen tako da se rasterećenje uzorka vrši do iznosa sile  $F = 0$  N. To je uzrokovalo efekt udara prilikom svakog novog opterećenja gumenog elementa. Kako bi se izbjegao spomenuti efekt, eksperiment je ponovljen, ali ovoga puta s rasterećenjem gumenog elementa na iznos sile  $F = 5$  N, što utječe na konačne rezultate mjerenja. Kidalica na kojoj je izvršen eksperiment namijenjena je za rad s vrlo velikim silama (pri statičkom opterećenju postiže sile iznosa do 50 kN), a vrijednosti sila prilikom vlačnog eksperimenta su iznosile  $F_{\max} \approx 100$  N, te je moguće da je nastupila određena količina mjerne greške.

Potom su prikazani rezultati tlačnog i vlačnog eksperimenta na dva uzorka gumenog elementa izvršena različitim brzinama deformiranja za slučajeve s mazivim sredstvom te bez mazivog sredstva. Rezultati za vlačno ispitivanje uz korištenje mazivog sredstva dobiveni eksperimentom su neočekivani te se kasnije pokazalo da su u suprotnosti s numeričkim rješenjem. Prilikom vlačnog ispitivanja gumenog elementa, uzorak premazan mazivim sredstvom u svrhu smanjenja trenja treba veću silu nego uzorak bez mazivog sredstva za postizanje zadanog pomaka.

U svrhu preklapanja rezultata eksperimenta i numerike napravljen je numerički model u programskom paketu *Abaqus*. Postavljeni su odgovarajući rubni uvjeti te je zadano opterećenje. Ispitana je konvergencija rješenja za različite gustoće mreže konačnih elemenata te je odabrana prikladna mreža. U numeričkom modelu je korišten hiperelastični materijalni model, što omogućuje preklapanje samo linije opterećenja. Pri tome su, prilikom deformiranja gumenog elementa, zanemarene visko-elastične pojave. Ispitani su različiti materijalni modeli te je

odabran neo-Hooke model, koji se prema iskustvenim smjernicama koristi do  $\approx 40\%$  deformacija. Iznos maksimalnih deformacija prilikom numeričke analize iznosio je  $\varepsilon_{\max} \approx 75\%$ , čime navedeni konstitutivni model izlazi iz granica uporabe. U radu su također ispitani Ogden i Arruda-Boyce materijalni modeli. Mijenjanjem parametara navedenih modela nije se povećavala točnost numeričkih rezultata usporedbom s eksperimentalnim mjerenjima. U nedostatku eksperimentalnih mjerenja, a time i podataka o materijalu nisu korišteni složeniji hiperelastični modeli. U numeričkoj analizi je, radi jednostavnosti, korištena pretpostavka da je materijal gumenog elementa potpuno nestlačiv ( $D_1 = 0 \text{ MPa}^{-1}$ ). Preklapanjem rezultata dobivene su materijalne konstante  $C_{10}$  za različite brzine deformiranja uzorka.

U radu je korišten jednostavan Columbov model trenja koji se pokazao neprikladnim. Stoga je eksperimentalnim mjerenjem potrebno odrediti dodatne parametre potrebne za definiranje prikladnijeg kontaktnog modela koji može dovoljno točno opisati stvarnu dodirnu interakciju gumenog elementa i ploče, odnosno cilindra.

U radu u konačnici nije postignuto zadovoljavajuće poklapanje rješenja. Razlog tome je što nisu definirani dovoljno detaljni proračunski modeli te su pri tome zanemareni efekti koji imaju značajan utjecaj na konačne rezultate. Rezultati ovog rada pokazuju da je nužna provjera na više različitih stanja deformacija. Ispitivanje samo tlačnog deformiranja daje dobro preklapanje rezultata numeričke analize i eksperimenta, a uključivanje rezultata vlačnog deformiranja ukazuje na nepouzdanost korištenja samo jedne metode deformacija.

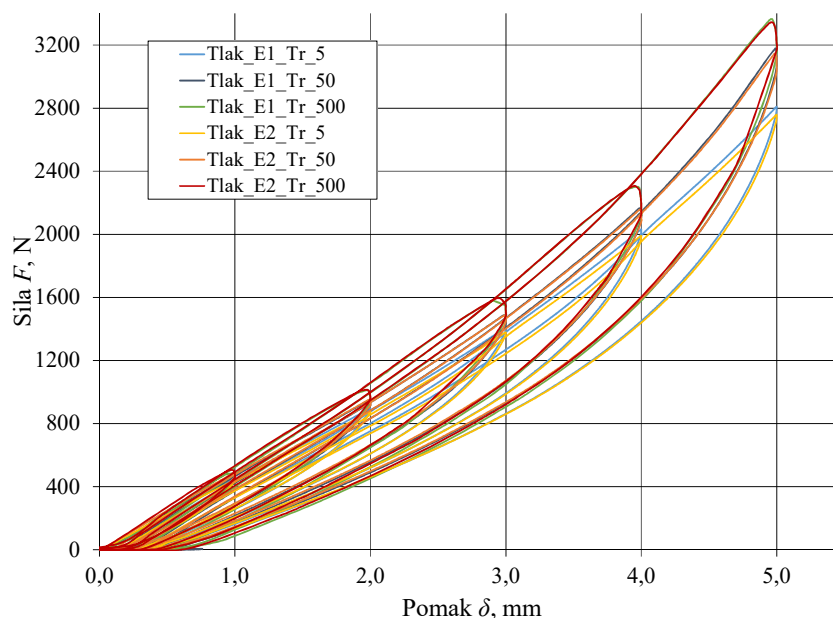
Usprkos navedenim nedostacima, potrebno je naglasiti da je numerički pogođen trend krivulje sila-pomak. Krivulje sila-pomak u numeričkoj analizi kao i u eksperimentu imaju progresivnu karakteristiku što implicira da se uvidom u rezultate iz ovog rada mogu procijeniti i kao orijentacijske vrijednosti koristiti elastični parametri materijala gumenog elementa rastojnika-prigušivača.

## 9. DODATAK

U ovom poglavlju su prikazani kompletni dijagrami tlačnog i vlačnog eksperimenta pri brzinama deformiranja od 5, 50 i 500 mm/min, sa i bez mazivog sredstva, te sa predkondicioniranjem i bez predkondicioniranja. Prikazani su i svi ciklusi deformiranja (1, 2, 3, 4 i 5 mm). Svi efekti objašnjeni uz dijagrame u poglavljima 6.2 i 6.3 vrijede i za ove dijagrame.

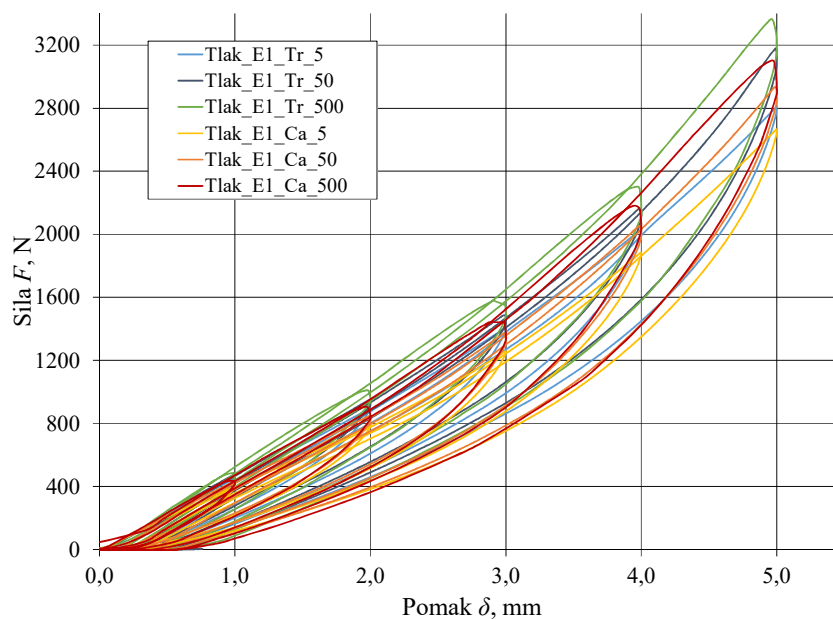
### Tlak

Slika 9.1. pokazuje usporedbu rezultata uzoraka E1 i E2 pri brzinama ispitivanja 5, 50 i 500 mm/min, za slučaj s trenjem, bez predkondicioniranja.



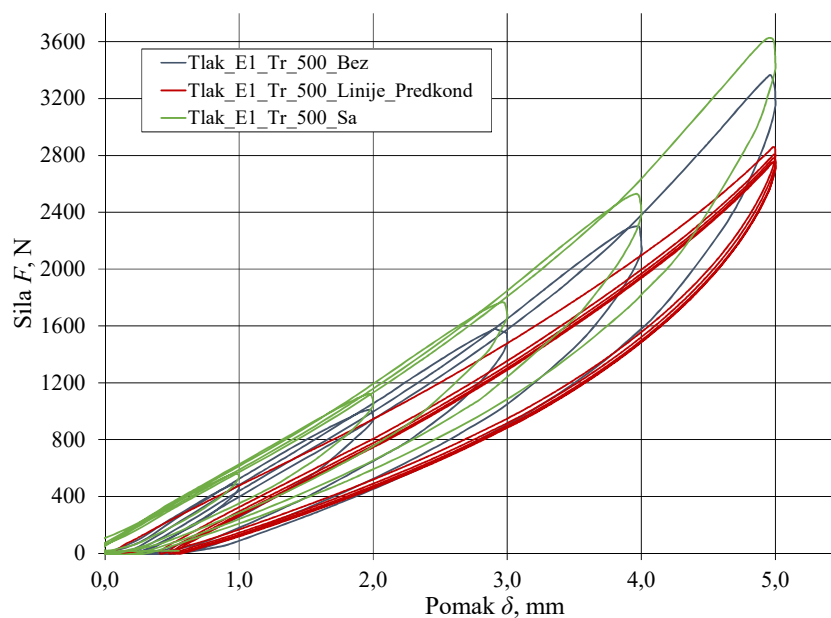
**Slika 9.1. Usporedba rezultata ispitivanja za uzorak E1 i E2**

Slika 9.2. prikazuje usporedbu rezultata mjerenja za uzorak E1 za brzine od 5, 50 i 500 mm/min za slučajeve sa i bez mazivog sredstva, bez predkondicioniranja.



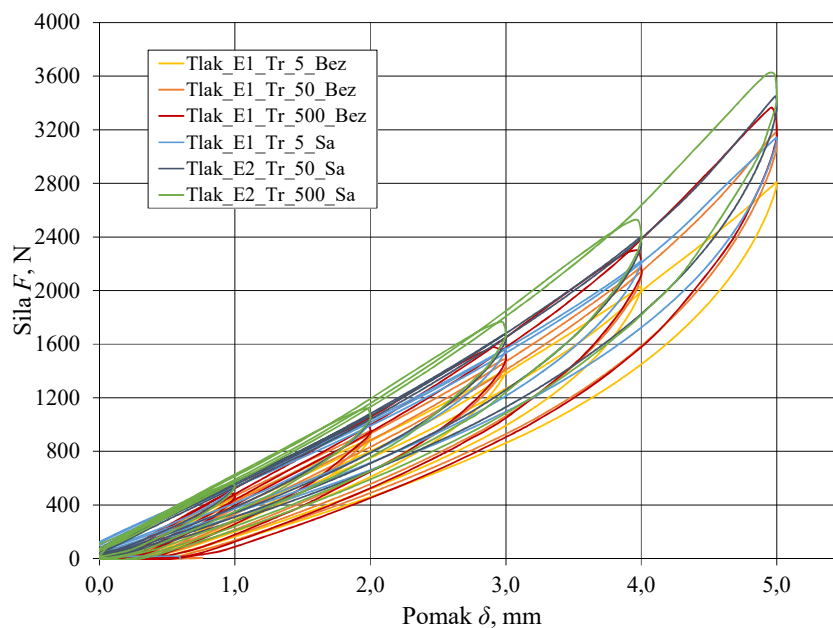
**Slika 9.2. Usporedba rezultata sa i bez mazivog sredstva**

Slika 9.3. prikazuje rezultate ispitivanja na tlak pri brzini od 500 mm/min za slučaj bez mazivog sredstva, sa predkondicioniranjem i bez. Na slici se vide linije predkondicioniranja koje su u kasnijim dijagramima uklonjene radi bolje preglednosti.



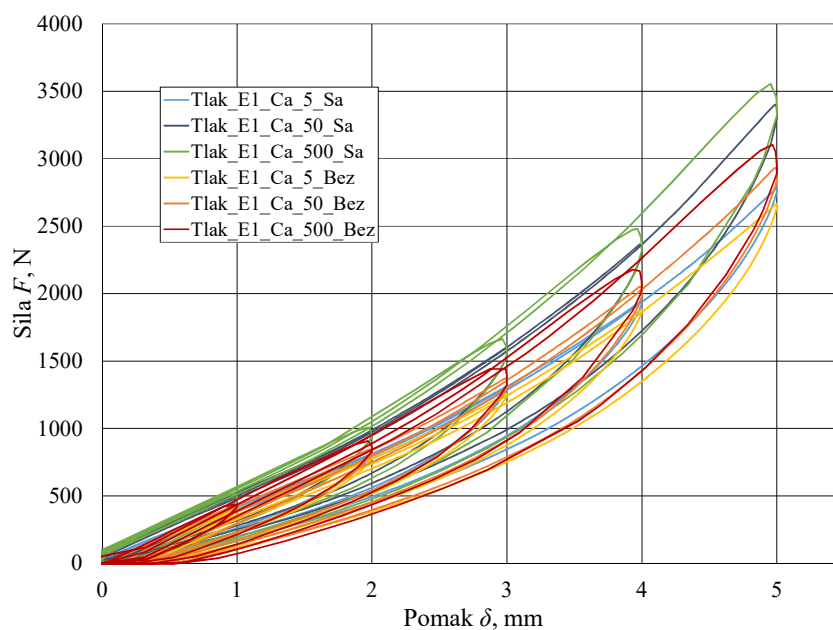
**Slika 9.3. Rezultati sa i bez predkondicioniranja za brzinu od 500 mm/min i s trenjem**

Slika 9.4. prikazuje usporedbu rezultata dobivenih tlačenjem uzorka pri brzini od 5, 50 i 500 mm/min za slučaj sa i bez predkondicioniranja te bez mazivog sredstva.



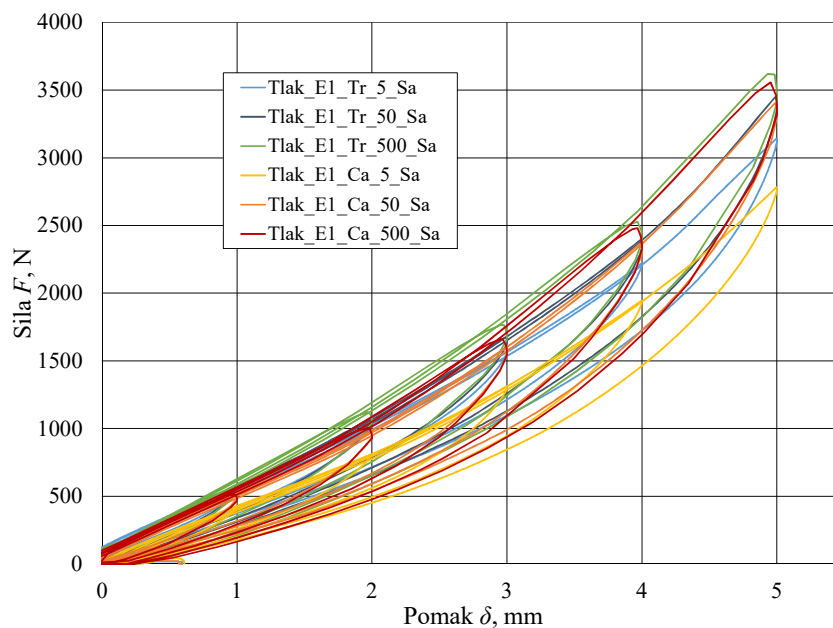
**Slika 9.4. Rezultati sa i bez predkondicioniranja s trenjem za sve tri brzine**

Slika 9.5. prikazuje rezultate za sve tri brzine, sa i bez predkondicioniranja te sa mazivim sredstvom.



**Slika 9.5. Rezultati sa i bez predkondicioniranja s mazivim sredstvom, za sve tri brzine**

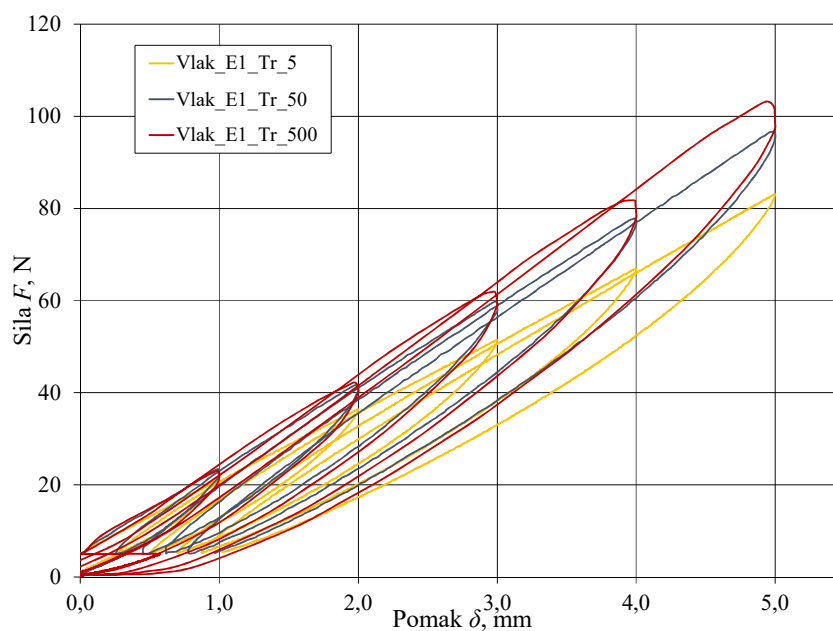
Slika 9.6. prikazuje utjecaj trenja na odnos sila-pomak za brzine 5, 50 i 500 mm/min za slučaj s predkondicioniranjem.



**Slika 9.6. Utjecaj trenja za slučaj s predkondicioniranjem**

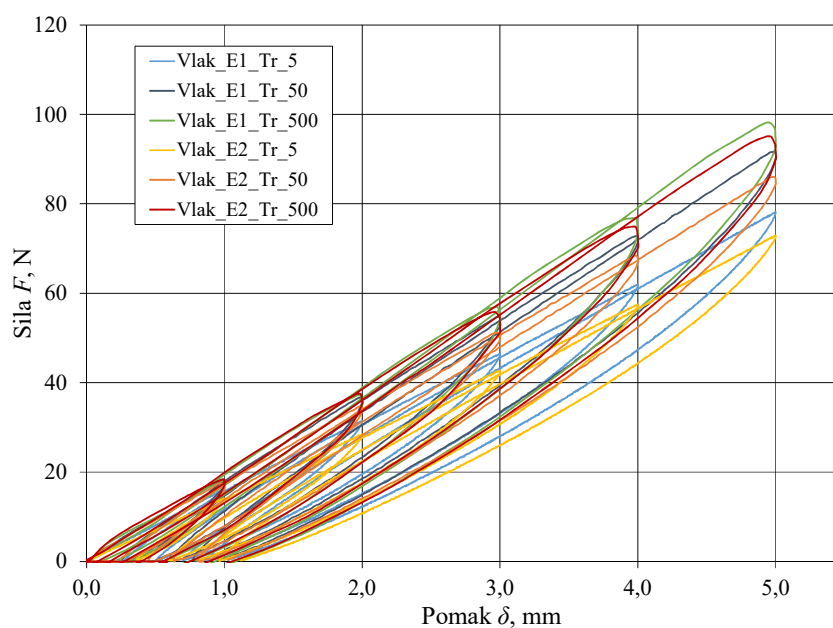
## Vlak

Slika 9.7. prikazuje rezultate vlačnog ispitivanja za uzorak E1. Uzorak se rasterećivao do 5 N kako bi ostao u konstantnom kontaktu s cilindrom. Na taj način je izbjegnuto udar prilikom ponovnog opterećivanja uzorka. Stoga su u daljnjem dijelu rada linije vlačnog ispitivanja pri brzini od 5, 50 i 500 mm/min pomaknute za 5 N.



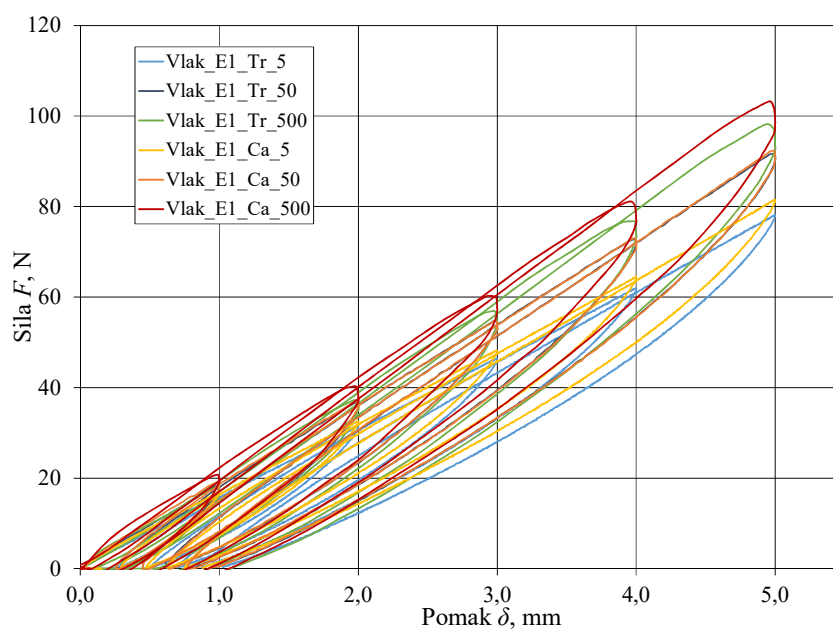
**Slika 9.7. Rezultati vlačnog ispitivanja prikazani s prednaprežanjem**

Slika 9.8. pokazuje usporedbu rezultata uzoraka E1 i E2 pri brzinama ispitivanja 5, 50 i 500 mm/min, za slučaj s trenjem, bez predkondicioniranja.



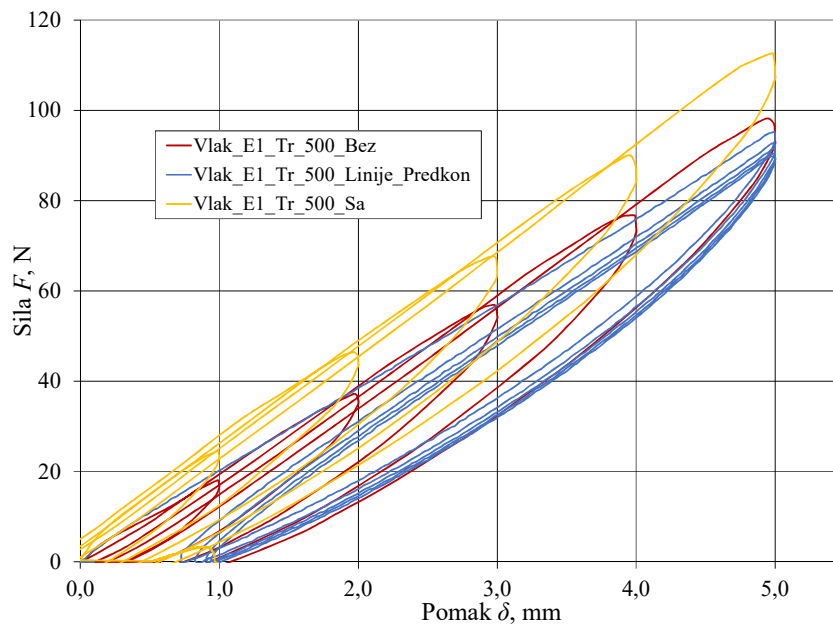
**Slika 9.8. Usporedba uzoraka E1 i E2**

Slika 9.9. prikazuje rezultate mjerenja za uzorak E1 pri brzinama 5, 50 i 500 mm/min za slučajeve sa i bez mazivog sredstva, bez predkondicioniranja.



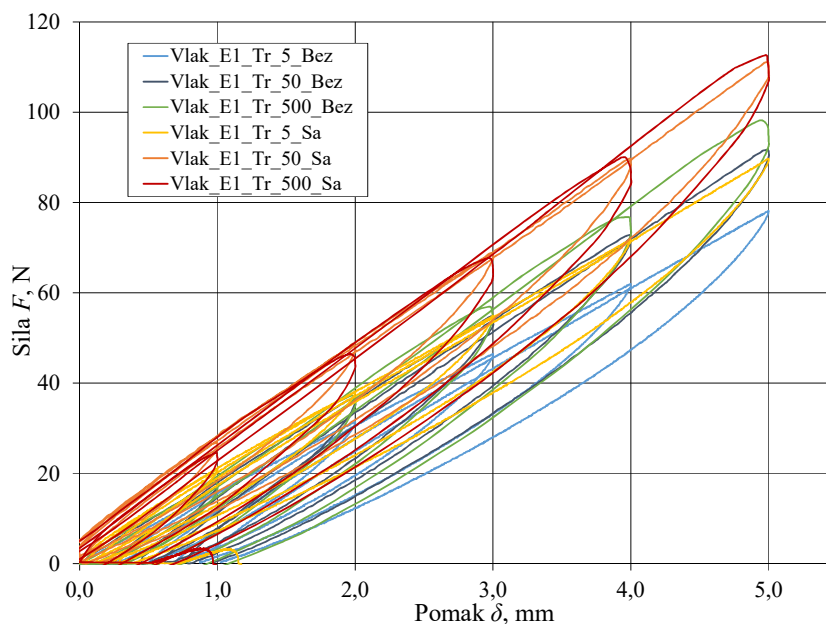
**Slika 9.9. Uzorak E1 – rezultati sa i bez mazivog sredstva**

Slika 9.10. prikazuje rezultate ispitivanja na vlak pri brzini od 500 mm/min za slučaj bez mazivog sredstva, sa i bez predkondicioniranja. U nastavku rada linije predkondicioniranja su uklonjene.



**Slika 9.10. Rezultati sa i bez predkondicioniranja za brzinu od 500 mm/min i s trenjem**

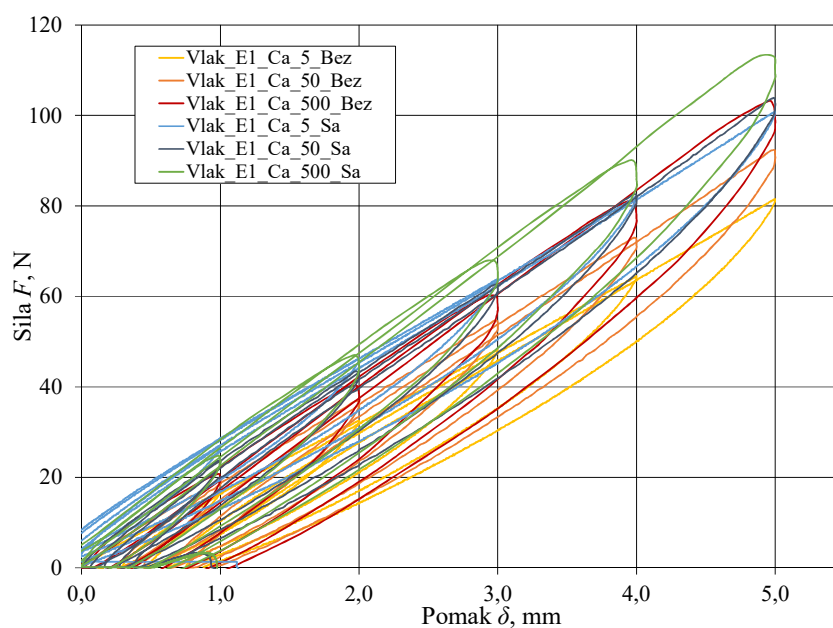
Slika 9.11. prikazuje usporedbu vlačnih ispitivanja uzorka pri brzini od 5, 50 i 500 mm/min za slučaj sa i bez predkondicioniranja te bez mazivog sredstva.



**Slika 9.11. Rezultati sa i bez predkondicioniranja s trenjem, za sve brzine**

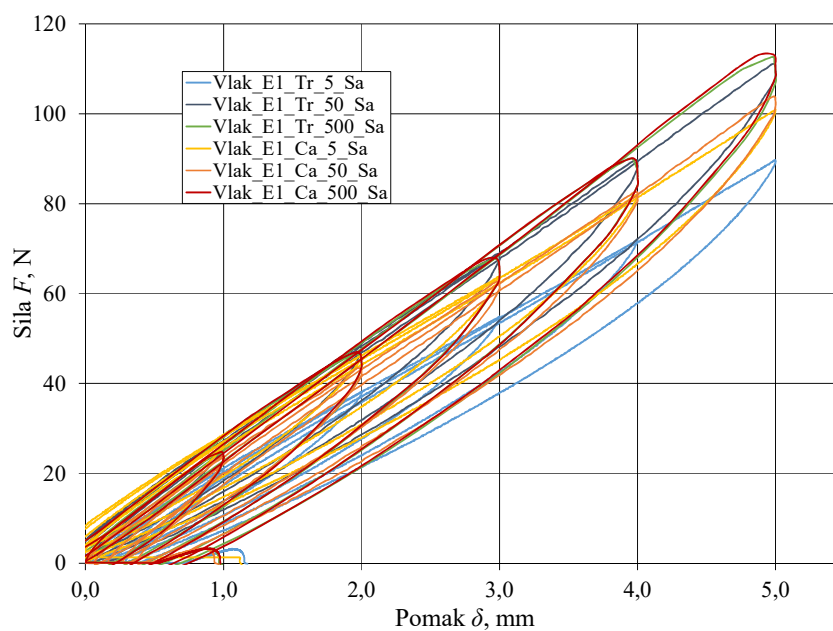


Slika 9.12. prikazuje usporedbu vlačnih ispitivanja uzorka pri brzini od 5, 50 i 500 mm/min za slučaj sa i bez predkondicioniranja te sa mazivim sredstvom.



**Slika 9.12. Rezultati sa i bez predkondicioniranja s mazivim sredstvom, za sve brzine**

Slika 9.13. prikazuje utjecaj trenja na odnos sila-pomak za brzine 5, 50 i 500 mm/min za slučaj s predkondicioniranjem.



**Slika 9.13. Utjecaj trenja za slučaj s predkondicioniranjem**

## LITERATURA

- [1] *Vedriš, M., Dinamička analiza rastojnika-prigušivača tipa „quad“, Završni rad*, FSB, Zagreb, 2014.
- [2] *Wolf, H., Adum, B., Preporuke za razmještanje rastojnika i rastojnika - prigušivača, Elaborat*, Zagreb, 2008.
- [3] *Wolf, H., Adum, B., Semenski, D., Pustaić, D., Using the Energy Balance Method in Estimation of Overhead Transmission Line Aeolian Vibrations*, *Strojarstvo*, Vol. 50, No. 5, pp. 269-276, 2008.,
- [4] *Verma, H., Aerodynamic and structural modeling for vortex-excited vibrations in bundled conductors, Dissertation*, Technischen Universitat Darmstadt, 2008., web stranica: [http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/1308/1/PhD\\_Thesis\\_Himanshu\\_2008\\_11\\_04.pdf](http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/1308/1/PhD_Thesis_Himanshu_2008_11_04.pdf), 14. lipanj 2016.
- [5] *Wolf, H., Adum, B., Božić, Ž., The impact of empirical rules for aeolian vibrations in overhead transmission lines*, *Trasation of famena* 34 (2010.), 2; 47 - 58.
- [6] *Zenzerović, I., Određivanje mehaničke impedancije prigušivača vibracija tipa Stockbridge, Završni rad*, FSB, Zagreb, 2010. web stranica: [http://repozitorij.fsb.hr/816/1/05\\_02\\_2010\\_Zavrsni\\_rad\\_Ivan\\_Zenzerovic.pdf](http://repozitorij.fsb.hr/816/1/05_02_2010_Zavrsni_rad_Ivan_Zenzerovic.pdf)
- [7] Web stranica: <http://adfc.sourceforge.net/img/tinta-cil2D-Re100.gif>, 14. lipanj 2016.
- [8] *Čakmak, D., Numerička analiza krutosti gumenog zgloba rastojnika-prigušivača*, *Diplomski rad*, FSB, Zagreb, 2016., web stranica: [http://repozitorij.fsb.hr/4448/1/cakmak\\_2015\\_diplomski.pdf](http://repozitorij.fsb.hr/4448/1/cakmak_2015_diplomski.pdf), 14. lipanj 2016.
- [9] *Rončević, B., Analiza kontaktnog problema sa smanjenjem kontaktne površine, Doktorska disertacija*, Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka 2012., web stranica: [http://www.riteh.uniri.hr/znanost/oglasna/PPSZ9\\_Ad\\_6\\_Doktorski\\_rad\\_Branimir\\_Ronc\\_ovic.pdf](http://www.riteh.uniri.hr/znanost/oglasna/PPSZ9_Ad_6_Doktorski_rad_Branimir_Ronc_ovic.pdf), 14. lipanj 2016.
- [10] *Goryacheva, I. G., Contact Mechanics in Tribology*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1998.
- [11] *Laursen, T. A., Computational Contact and Impact Mechanics, Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis*, Springer, New York 2003

- [12] *Smith, R. H., Analyzing Friction in the Design of Rubber Products and Their Paired Surfaces*, CRC Press LLC, Boca Raton 2008.
- [13] *Wriggers, P., Computational Contact Mechanics*, John Wiley & Sons, Inc., Chichester 2002.
- [14] *Johnson, K., L., Contact Mechanics*, Cambridge University Press, New York 1985. , web stranica: <http://www.ewp.rpi.edu/hartford/~ernesto/F2012/FWM/Papers/Johnson-CONTACT%20MECHANICS.pdf>, 14. lipanj 2016.
- [15] *Zhong, Z. H., Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems*, Oxford University Press, Oxford 1993.
- [16] *King, S., Richards, T., Solving Contact Problems with Abaqus*, DS UK Ltd, Coventry March 2013. web stranica: [http://marketing.intrinsys.co.uk/CONTACT\\_SEMINAR.pdf](http://marketing.intrinsys.co.uk/CONTACT_SEMINAR.pdf), 14. lipanj 2016.
- [17] *Dassault Systèmes, Abaqus 6.9-3*, web stranica: <http://www.3ds.com/products-services/simulia/portfolio/abaqus/overview/>, 14. lipanj 2016.
- [18] *Dassault Systèmes, Abaqus 6.9 User's guide and theoretical manual*, Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., 2009.
- [19] *Dassault Systèmes, Simulia Abaqus 6.9 Documentation*, web stranica: [http://www.tu-chemnitz.de/projekt/abq\\_hilfe/docs/v6.9/](http://www.tu-chemnitz.de/projekt/abq_hilfe/docs/v6.9/), <http://abaqusdoc.ucalgary.ca/v6.9/>, <http://130.149.89.49:2080/v6.9/>, 14. lipanj 2016.
- [20] *Jakel, R., Analysis of Hyperelastic Materials with MECHANICA, Theory and Application Examples, Presentation for the 2nd SAXSIM*, PTC, Inc., 27. April 2010., web stranica: [http://www.qucosa.de/fileadmin/data/qucosa/documents/5995/data/Analysis\\_of\\_Hyperelastic\\_Materials\\_with\\_MECHANICA.pdf](http://www.qucosa.de/fileadmin/data/qucosa/documents/5995/data/Analysis_of_Hyperelastic_Materials_with_MECHANICA.pdf), 14. lipanj 2016.
- [21] *Tonković, Z., Marenić, E., Numerička analiza konstrukcija, Predavanja*, FSB, Zagreb 2014.
- [22] *Ivančo, V., Introduction To Nonlinear Finite Element Analysis*, HS Wismar, June 2009., June 2011., web stranica: <http://documents.mx/documents/fea-of-nonlinear-problems-2011-ivanco.html> , 14. lipanj 2016.
- [23] *Alfirević, I., Nauka o čvrstoći I*, Tehnička knjiga, Zagreb 1995.

- [24] *Alfirević, I.*, **Linearna analiza konstrukcija**, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 1999
- [25] *Hibbeler, R. C.*, **Mechanics of Materials, 8th Edition**, Prentice Hall, Pearson Inc., New Jersey 2011
- [26] *De Borst, R., Crisfield, M. A., Remmers, J. J. C., Verhoosel, C. V.*, **Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Second edition**, John Wiley & Sons, Inc., United Kingdom 2012.
- [27] *Holzappel, G. A.*, **Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering**, John Wiley & Sons, Inc., Chichester 2000
- [28] *Bathe, K. J.*, **Finite Element Procedures**, Prentice Hall, New Jersey 1996.
- [29] *Zahavi, E., Barlam, D.*, **Nonlinear Problems in Machine Design**, CRC Press, Boca Raton 2001
- [30] *Gent, A. N.*, **Engineering with Rubber, How to Design Rubber Components, 3rd Edition**, Hanser, München 2012.
- [31] *Ogden, R. W.*, **Non-Linear Elastic Deformations**, Dover Publications, New York 1997.
- [32] *Rivlin, R. S.*, **Collected Papers of R.S. Rivlin, Volume I and II**, Springer, New York 1997
- [33] *Treloar, L. R. G.*, **The Physics of Rubber Elasticity, Third Edition**, Oxford University Press, Oxford 2005.
- [34] *Treloar, L. R. G.*, **Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation**, Trans. Faraday Soc., Vol. 40, pp. 59–70, 1944.
- [35] *Bower, A. F.*, **Applied Mechanics of Solids**, CRC Press, Boca Raton 2010., web stranica: <http://solidmechanics.org/index.html>, <http://www.brown.edu/Departments/Engineering/Courses/En221/Notes/Elasticity/Elasticity.htm>, [http://solidmechanics.org/text/Chapter3\\_5/Chapter3\\_5.htm](http://solidmechanics.org/text/Chapter3_5/Chapter3_5.htm), 14. lipanj 2016.
- [36] *ASTM International*, **ASTM D2240, Standard Test Method for Rubber Property—Durometer Hardness**, ASTM, 2000., web stranica: <http://www.abqindustrial.net/store/images/products/dmt/RX-DD/d2240.pdf>, 14. lipanj 2016.
- [37] *Salopek, V.*, **Dinamička izdržljivost brodograđevinskog čelika**, Diplomski rad, FSB, Zagreb, 2011.